

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **ZAVRŠNI RAD**

Marko Barišić

Zagreb, 2017.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **ZAVRŠNI RAD**

Mentor:

Prof. dr. sc. Josip Kasać, dipl. ing.

Student:

Marko Barišić

Zagreb, 2017.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru dr. sc. Josipu Kasaću na korisnim savjetima i diskusijama tokom izrade ovog završnog rada.

Marko Barišić



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:  
proizvodno inženjerstvo, računalno inženjerstvo, industrijsko inženjerstvo i menadžment, inženjerstvo  
materijala i mehatronika i robotika

Sveučilište u Zagrebu
Fakultet strojarstva i brodogradnje
Datum 23-02-2017 Prilog
Klasa: 602-04/17-6/4
Ur.broj: 15-1703-17-63

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student:

MARKO BARIŠIĆ

Mat. br.: 0035193337

Naslov rada na  
hrvatskom jeziku:

METODA INVARIJANTNIH MOMENATA S PRIMJENOM U  
PREPOZNAVANJU OBLIKA

Naslov rada na  
engleskom jeziku:

METHOD OF INVARIANT MOMENTS WITH APPLICATION IN  
PATTERN RECOGNITION

Opis zadatka:

Prepoznavanje objekata snimljenih digitalnom kamerom postalo je neizostavnim dijelom suvremenih inteligentnih montažnih sustava. Tipičan zahtjev kod automatske montaže je sklapanje proizvoda od dijelova koji se nalaze na radnoj površini ili pokretnoj traci pomoću kamere i robotskog manipulatora. Pri tome ključnu ulogu imaju algoritmi za prepoznavanje objekata koji se nalaze u različitim položajima u odnosu na originalni referentni položaj. Ovaj rad bavi se implementacijom metode invarijantnih momenata pomoću koje je moguće prepoznati objekte koji su translirani, zarotirani i skalirani u odnosu na originalni referentni položaj.

U zadatku je potrebno:

- Snimiti referentne fotografije nekoliko objekata različitih geometrijskih oblika u horizontalnoj ravni. Zatim je potrebno snimiti svaki objekt u nekoliko različitih položaja koji se mogu dobiti translacijom, rotacijom i skaliranjem originalnog položaja objekta.
- Potrebno je napisati računalni program koji će učitati fotografije sa snimljenim objektima te izračunati odgovarajuće momente invarijantne na translaciju, rotaciju i skaliranje.
- Invarijantne momente objekata fotografiranih u različitim položajima potrebno je usporediti s momentima objekata u originalnim položajima. Na temelju numeričkih indikatora za klasifikaciju potrebno je odrediti pripadnost fotografiranog objekta odgovarajućoj klasi originalno snimljenih objekata.
- U slučaju nerobusnosti klasifikacije objekata zbog nesavršenih uvjeta snimanja, potrebno je primijeniti odgovarajuće metode filtriranja slike prije faze računanja invarijantnih momenata.

Zadatak zadan:

30. studenog 2016.

Zadatak zadao:

Rok predaje rada:

1. rok: 24. veljače 2017.

2. rok (izvanredni): 28. lipnja 2017.

3. rok: 22. rujna 2017.

Predviđeni datumi obrane:

1. rok: 27.2. - 03.03. 2017.

2. rok (izvanredni): 30. 06. 2017.

3. rok: 25.9. - 29. 09. 2017.

v.d. predsjednika Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Josip Kasać

Izv. prof. dr. sc. Branko Bauer

## Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>i</b>
<b>Popis slika</b>	<b>iii</b>
<b>Popis tabela</b>	<b>iv</b>
<b>Popis oznaka</b>	<b>v</b>
1. Sažetak	1
Summary	2
2. Uvod	3
3. Metoda invarijantnih momenata	5
3.1. Uvod	5
3.2. Invarijante	5
3.3. Kategorije invarijanti	6
3.4. Momenti	7
3.5. Geometrijski i kompleksni momenti	8
3.6. Invarijante momenata na translaciju, rotaciju i skaliranje	9
3.7. Invarijante na translaciju	9
3.8. Invarijante na uniformno skaliranje	10
3.9. Tradicionalne rotacijske invarijante	11
3.10. Rotacijske invarijante iz kompleksnih momenata	12
3.10.1 Konstrukcija rotacijskih invarijanti	12
3.10.2 Konstrukcija baze	13
3.10.3. Baze invarijanti drugog i trećeg reda	15
4. Program	16
4.1. Uvod	16
4.2. Binarizacija fotografija	16
4.3. Zapis momenata u diskretnom obliku	21
4.4. Izbor baze i normalizirana razlika baznih vektora	22
4.5. Idealni slučaj sa računanjem skaliranih kompleksnih momenata	24

4.6. Realni slučaj sa računanjem skaliranih kompleksnih momenata	27
4.7. Idealni i realni slučaj sa računanjem kompleksnih momenata	29
4.8. Realni slučaj sa normiranjem svakog elemnta vektora skaliranih kompleksnih momenata	32
4.9. Idealni i realni slučaj sa skaliranim kompleksnim momentima invarijantnim na simetriju	36
5. Evaluacija rezultata	42
6. Zaključak	44
7. Literatura	45
8. Prilog	46
8.1. PRILOG 1 Kod za binarizaciju slike	46
8.2. PRILOG 2 Geometrijski momenti	47
8.3. PRILOG 3 Centralni momenti	47
8.4. PRILOG 4 Kompleksni momenti	48
8.5. PRILOG 5 Skalirani kompleksni momenti	49
8.6. PRILOG 6 Vektor kompleksnih momenata	50
8.7. PRILOG 7 Vektor skaliranih kompleksnih momenata	51
8.8. PRILOG 8 Idealni slučaj	52
8.9. PRILOG 9 Realni slučaj	55
7.10. PRILOG 10 Vektor skaliranih kompleksnih momenata za simetrične objekte	57
8.11. PRILOG 11 Automatski izračun svih invarijanti do zadanog reda	58

## Popis slika

Slika 1 Razlike momenata za dvije klase objekata [1] .....	6
Slika 2 Hu-ove invarijante [3] .....	11
Slika 3 Originalna fotografija .....	17
Slika 4 Siva slika .....	17
Slika 5 Slika nakon primijenjenog filtera .....	18
Slika 6 Slika nakon primijenjene naredbe "imadjust" .....	19
Slika 7 Slika nakon funkcije "im2bw" .....	20
Slika 8 Završna slika koju funkcija vraća .....	20
Slika 9 Originalne slike .....	24
Slika 10 Rotirane i skalirane slike .....	25
Slika 11 Obradene slike .....	27
Slika 12 Vrijednosti invarijanti .....	36
Slika 13 Graf koji pokazuje vjerojatnost prepoznavanja različitih metoda .....	43

## Popis tabela

Tabela 1 Vrijednosti matrice M pri idealnom slučaju i skaliranim kompleksnim momentima .....	26
Tabela 2 Vrijednosti matrice M pri realnom slučaju i skaliranim kompleksnim momentima .....	28
Tabela 3 Vrijednosti matrice M pri idealnom slučaju i kompleksnim momentima .....	30
Tabela 4 Vrijednosti matrice M pri realnom slučaju i kompleksnim momentima.....	31
Tabela 5 Vrijednosti matrice M pri prvom načinu drugačijeg normiranja realnog slučaja i skaliranim kompleksnim momentima .....	34
Tabela 6 Vrijednosti matrice M pri drugom načinu drugačijeg normiranja realnog slučaja i skaliranim kompleksnim momentima .....	35
Tabela 7 Vrijednosti matrice M pri metodi primjene invarijanti na simetriju na idelani slučaj .....	38
Tabela 8 Vrijednosti matrice M pri metodi primjene invarijanti na simetriju na realni slučaj .....	39
Tabela 9 Vrijednosti matrice M pri metodi primjene potpunih invarijanti šestog reda na simetriju na realni slučaj .....	41



## Popis oznaka

Oznaka	Opis
$c_{pq}$	Kompleksni moment
$D$	Operator degradacije
$I$	Invarijanta
$\mathbf{M}$	Matrica izračunatih vrijednosti
$M_{pq}$	Generalni moment
$m_{pq}$	Geometrijski moment
$\mathbf{R}$	Rotacijska matrica
$R$	Red momenta
$S$	Faktor skaliranja
$\mathbf{t}$	Transformacijski vektor
$\alpha$	Kut rotacije
$\beta$	Baza svih rotacijskih invarijanti do reda $r$
$\delta$	Set rotacijskih invarijanti
$\mu_{pq}$	Centralni geometrijski momenti
$v_{pq}$	Normalizirani momenti
$\emptyset$	Element baznog vektora

## 1. Sažetak

U današnjim suvremenim inteligentnim montažnim sustavima postalo je nužno moći prepoznati objekt snimljen digitalnom kamerom. Najveću primjenu u industriji, prepoznavanje objekata, pronalazi u automatskoj montaži, odnosno u sklapanju proizvoda od više dijelova. Dijelovi koji se nalaze na radnoj površini ili pokretnoj traci spajaju se pomoću robotskog manipulatora navođenog pomoću kamere. Kako se predmeti na radnoj površini ili pokretnoj traci mogu nalaziti u različitim položajima u odnosu na originalni referentni položaj, ključnu ulogu imaju algoritmi koji vrše prepoznavanje.

Ovaj rad se bavi implementacijom metode invarijantnih momenata pomoću koje je moguće prepoznati objekte koji su translirani, zarotirani i skalirani u odnosu na originalni referentni položaj. U sklopu rada snimljeno je 5 referentnih fotografija različitih objekata u horizontalnoj ravnini, a zatim je svaki objekt snimljen u nekoliko različitih položaja koji su dobiveni translacijom, rotacijom i skaliranjem u odnosu na originalni položaj objekta. Nakon toga napisan je računalni program koji učitava fotografije, pretvara ih iz slika u boji u binarne slike i računa odgovarajuće momentne invarijante na translaciju, rotaciju i skaliranje. Invarijantni momenti slike uspoređuju se jedni sa drugim i određuje se da li je prepoznat isti objekt u drugačijem položaju. Nakon uviđanja mana osnovnih momentnih invarijanti na translaciju, rotaciju i skaliranje testirane su drugačije invarijante koje su invarijantne na simetriju objekta.

**Ključne riječi:** prepoznavanje objekata, obrada slike, metoda invarijantnih momenata

## Summary

In today's contemporary intelligent mounting systems it has become necessary to be able to recognize object taken with digital camera. Recognition of object found greatest application in automatic assembly regarding assembling products that consists of several parts. Parts that are found on a working surface or a treadmill are put together by a robot manipulator guided by camera. Since objects on working surfaces and treadmills can be found in different positions in regarding to original position algorithms for recognition play key role.

This paper deals with the implementation of invariant moment method which enables us to recognize objects that are translated, rotated and scaled in regarding to original referent position. As part of the work 5 images of different objects were photographed in horizontal plane and then every object was photographed several times in different positions obtained by translation, rotation and scaling. After that computer program was written that uploads photographs, converts them into binary images and calculates translation, rotation and scaling moment invariants. Moment invariants of each image is compared to one another and determined if the same object but in different position was recognized as that object. After seeing faults of basic translation, rotation and scaling moment invariants different invariants were tested that are invariant to symmetry of objects.

**Key words:** object recognition, image analysis, invariant moment method

## 2. Uvod

U svakodnevnom životu ljudi konstanto primaju, obrađuju i analiziraju velike količine informacija raznih vrsta, važnosti i kvalitete. Analizom primljenih informacija ljudi donose odluke i djeluju prema toj analizi. Poznato je da je vid čovjekovo najvažnije osjetilo. Naime, više od 95% informacija koje mi doživljavamo su optičkog karaktera. Čak i u komunikaciji sa drugim ljudima 83% od ukupne interakcije se odvija preko osjetila vida i zbog toga slike predstavljaju moćan informacijski medij i komunikacijski alat koji može predstavljati kompleksne scene i procese na kompaktan i efikasan način. Zahvaljujući tomu slike nisu samo primarni izvor informacija nego se također koriste u komunikaciji između ljudi, a također i za interakciju između ljudi i strojeva. Digitalne fotografije sadržavaju veliku količinu informacija, npr. jedna fotografija fotografirana mobitelom može sadržavati informacija kao nekoliko stotina listova teksta i zbog tog razloga javlja se potreba za automatskom i moćnom metodom analize slika. Postoji više tehnika za analizu slike, a mi ćemo se u ovom radu baviti momentima slike. U robotskoj viziji, astronomiji, medicini i drugim granama znanosti veliki problem se javlja pri analizi i interpretaciji slika koje dolaze iz ne idealnih, odnosno realnih izvora. Kako zbog realnih izvora slika, a tako i zbog uvjeta snimanja javlja se određena degradacija slike. Na degradaciju slike mogu utjecati razni čimbenici poput geometrije scene, aberacija leće, fokus, brzina objekata u sceni, sistematične i slučajne pogreške senzora itd. Relacija između idealne  $f(x,y)$  i slike koju možemo promatrati  $g(x,y)$  opisana je kao  $g=D(f)$ , gdje je  $D$  poznat kao operator degradacije. Operator degradacije  $D$  može se rastaviti na radiometrijski degradacijski operator  $R$  i geometrijski degradacijski operator  $G$ . Cilj je analizirati nepoznatu scenu  $f(x,y)$  idealne slike pomoću dobivene slike  $g(x,y)$  i prije poznatih informacija o degradaciji. Pod pojmom analize scene podrazumijevamo kompleksni proces koji se sastoji od tri faze. Pretprocesiranje, prepoznavanje objekata interesa i analiziranje prostornih veza između objekata. U ovom radu mi ćemo se baviti sa prva dva od navedena tri procesa.

Prvi koji je objavio značajan rad o upotrebi invarijantnih momenata u svrhu analize slike i prepoznavanja objekata bio je Hu 1962. godine sa radom pod imenom „Visual pattern recognition by moment invariants“. Taj rad postavio je matematičku osnovu dvodimenzionalnih invarijanti momenata i njihove primjene na procesiranju vizualnih informacija i spominje se u

svim daljnjim radovima na tu temu. Momentne invarijante koje je Hu predložio koriste se čak još i danas za neke edukacijske i jednostavnije primjene zbog svoje jednostavnosti, ali nisu u ozbiljnijoj upotrebi zbog svojih ograničenja. Hu-ov rad se temeljio na radu teorije algebre invarijantnih formi matematičara Boolea, Cayleya i Sylvester iz devetnaestog stoljeća.

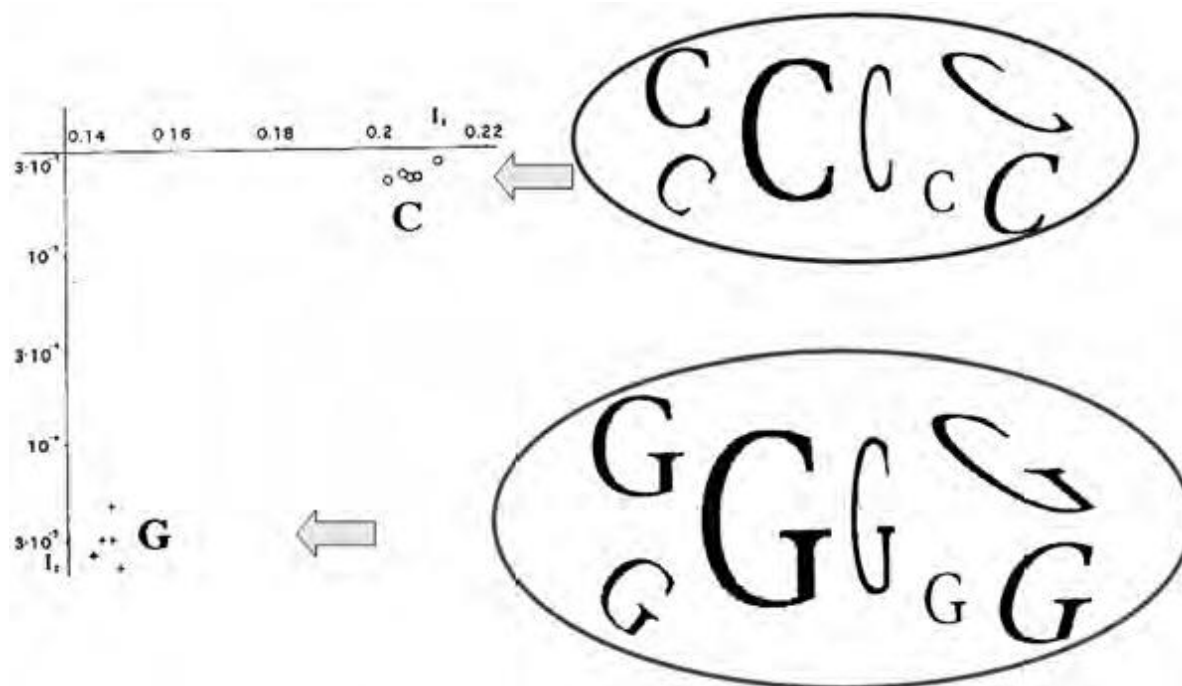
### 3. Metoda invarijantnih momenata

#### 3.1. Uvod

Prvi korak u prepoznavanju objekata pomoću metode invarijantnih momenata je upoznavanje sa osnovnim pojmovima kao što su invarijante, momenti itd. U ovom poglavlju objašnjeni su osnovni pojmovi, navedene su vrste invarijanti i momenata, čemu oni služe, njihova međusobna povezanost i koje vrste problema oni mogu riješiti prema [1].

#### 3.2. Invarijante

Postoje tri osnovna pristupa u prepoznavanju objekata: sirova snaga, normalizacija slike i invarijante. U pristupu sirovom snagom pretražuje se parametarski prostor za sve moguće degradacije slike. Ovaj pristup bi zahtijevao jako mnogo vremena i praktički je neprovediv. Pristup normalizacijom zasniva se na transformiranju objekata u sigurnu standardnu poziciju prije nego što uđu u klasifikator. Pristup je efikasan u fazi klasifikacije, ali normalizacija objekata obično zahtjeva rješavanje teških inverznih problema koji su obično loše postavljeni. Za razliku od prethodna dva pristupa invarijante su najobećavajuće i najviše korištene. Invarijante su mjerljive veličini koje opisuju objekt, neosjetljive su na određene deformacije i daju dovoljnu diskriminacijsku moć za prepoznavanje objekta. Drugim riječima invarijanta  $I$  ne mijenja svoju vrijednost pod utjecajem degradacijskog faktora  $D$  i zadovoljava uvjet  $I(f)=I(D(f))$  za bilo koju funkciju slike  $f$ . To svojstvo se naziva invarijantnost. U praksi, zbog nesavršenosti, utjecaja smetnji i šumova, govorimo da  $I(f)$  ne bi trebao biti značajno drugačiji od  $I(D(f))$ . Invarijante bi također trebale, za objekte različitih klasa, imati i značajno drugačije vrijednosti da bi ih mogle diskriminirati. Važan zadatak je naći kompromis između invarijantnosti i diskriminacijske moći i zbog toga se obično ne koristi jedna već više invarijanti istovremeno  $I_1, \dots, I_n$ .



Slika 1 Razlike momenata za dvije klase objekata [1]

### 3.3. Kategorije invarijanti

Najizravnija metoda kategorizacije je prema tipu invarijantnosti. Prepoznamo translacijske, rotacijske, skalirajuće, affine, projektivne i elastične geometrijske invarijante. Radiometrijske invarijante postoje uzimajući u obzir rastezanje linearnog kontrasta, nelinearne transformacije intenziteta i konvolucije.

Kategorizacija prema korištenim matematičkim alatima:

- Jednostavni opisivači oblika
- Transformacija koeficijenta značajke
- Invarijante postavljene u točki
- Diferencijalne invarijante
- Invarijante momenata

Kada gledamo iz kuta koji dio objekta nam je potreban da izračunamo invarijante:

- Globalne invarijante
- Localne invarijante
- Polu-lokalne

U ovom radu biti će obrađivane samo invarijante momenata. Invarijante momenata prvi puta je predstavio Hu. On je dao sedam invarijanti za rotaciju 2D objekata. Iako imaju svojih nedostataka od tada su invarijante momenata postale jedna od najvažnijih metoda za opis oblika.

### 3.4. Momenti

Momenti su široko korišteni proteklih nekoliko stotina godina u statistici i mehanici, a momenti slike označavaju određeni težinski prosjek inteziteta piksela slike [2]. Oni su skalarne vrijednosti korištene za karakterizaciju funkcija i hvatanje njenih značajnih svojstava. Sa matematičkog gledišta momenti su “projekcije” funkcija na polinomsku bazu. Pod funkcijom slike mi razumijemo bilo kakvu realnu funkciju  $f(x,y)$  od dvije varijable definirane na kompaktnoj podršci  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  i da ima konačni integral različit od nule. Generalni moment  $M_{pq}^{(f)}$  slike  $f(x,y)$ , gdje su  $p$  i  $q$  ne negativni cijeli brojevi i vrijedi  $r=p+q$  što zovemo red momenta definira se kao

$$M_{pq}^{(f)} = \int_D \int p_{pq}(x,y) f(x,y) dx dy \quad (3.1)$$

gdje su  $p_{00}(x,y), p_{10}(x,y), \dots, p_{kj}(x,y), \dots$  polinomske baze funkcije definirane na  $D$ .



### 3.5. Geometrijski i kompleksni momenti

Najuobičajeniji izbor je standardna eksponencijska baza  $p_{kj}(x,y)=x^k y^j$  koja vodi do geometrijskih momenata.

$$m_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^p y^q f(x,y) dx dy \quad (3.2)$$

Geometrijski momenti niskih redova imaju intuitivno značenje. “Masa” slike je  $m_{00}$  (za binarne slike  $m_{00}$  je površina objekta), a  $m_{10}/m_{00}$  i  $m_{01}/m_{00}$  definiraju težište slike. Momenti drugog reda  $m_{20}$  i  $m_{02}$  opisuju ono što bi se u mehanici zvalo momenti tromosti, a ovdje je to “distribucija mase” slike.

Još jedan zapis polinomne baze je  $p_{kj}(x,y)=(x+iy)^p(x-iy)^q$  gdje je  $i$  imaginarna jedinica. Ovakav zapis vodi do kompleksnih momenata zapisanih u jednadžbi (3.3).

$$c_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x+iy)^p (x-iy)^q f(x,y) dx dy \quad (3.3)$$

Geometrijski i kompleksni momenti sadržavaju jednaku količinu informacija i svaki kompleksni moment se može zapisati pomoću geometrijskog momenta i obrnuto.

$$c_{pq} = \sum_{k=0}^p \sum_{j=0}^q \binom{p}{k} \binom{q}{j} (-1)^{q-j} \cdot i^{p+q-k-j} \cdot m_{k+j,p+q-k-j} \quad (3.4)$$

$$m_{pq} = \frac{1}{2^{p+q} i^q} \sum_{k=0}^p \sum_{j=0}^q \binom{p}{k} \binom{q}{j} (-1)^{q-j} \cdot i^{p+q-k-j} \cdot c_{k+j,p+q-k-j} \quad (3.5)$$

Kompleksni momenti su korisni zato što imaju dobra rotacijska svojstva i zbog toga se pomoću njih konstruiraju invarijante za rotaciju.

### 3.6. Invarijante momenata na translaciju, rotaciju i skaliranje

Translacija, rotacija i skaliranje (TRS) su najjednostavnije transformacije prostornih koordinata.

TRS je transformacija sa četiri parametra koji su opisani kao

$$X' = sR \cdot x + t. \quad (3.6)$$

Gdje je:

$t$ -translacijski vektor

$s$ -pozitivni faktor za skaliranje(uniformno skaliranje)

$R$ -rotacijska matrica

$$R = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

$\alpha$ -kut rotacije.

Invarijantnost na translaciju, rotaciju i skaliranje potrebno je imati u gotovo svim praktičnim primjerima ako objekt želimo prepoznati bez obzira na njegovu poziciju, orijentaciju i udaljenost od kamere. Dok je izvod invarijanti za translaciju i skaliranje poprilično jednostavan, sa rotacijama to nije slučaj.

### 3.7. Invarijante na translaciju

Invarijante na rotaciju se postižu pomicanjem objekta tako da njegov centar koincidira sa izvorom koordinatnog sustava i obrnuto pomicanjem polinomne baze u centar objekta. Za geometrijske momente imamo tzv. centralne geometrijske momente

$$\mu_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_c)^p (y - y_c)^q f(x, y) dx dy. \quad (3.8)$$

Gdje su:

$$x_c = \frac{m_{10}}{m_{00}}, \quad (3.9)$$

$$y_c = \frac{m_{01}}{m_{00}}, \quad (3.10)$$

koordinate težišta i uvijek vrijedi  $\mu_{10} = \mu_{01} = 0$  i  $\mu_{00} = m_{00}$ . Centralni momenti mogu se zapisati pomoću geometrijski momenata kao

$$\mu_{pq} = \sum_{k=0}^p \sum_{j=0}^q \binom{p}{k} \binom{q}{j} (-1)^{k+j} \cdot x_c^k \cdot y_c^j \cdot m_{p-k, q-j} \quad (3.11)$$

Ovaj zapis može se koristiti za računanje centralnih momenata pomoću brzih algoritama za geometrijske momente.

### 3.8. Invarijante na uniformno skaliranje

Invarijantnost na skaliranje postiže se odgovarajućom normalizacijom svakog momenta. Svaki moment se može koristiti kao faktor za normalizaciju (ako je različit od nule), ali uglavnom se koriste momenti niskog reda zbog jednostavnijeg računa i stabilnosti prema šumu. Uglavnom normaliziramo pomoću  $\mu_{00}$

$$v_{pq} = \frac{\mu_{pq}}{\mu_{00}^\omega}, \quad (3.12)$$

gdje je

$$\omega = \frac{p+q}{2} + 1. \quad (3.13)$$

Moment  $v_{pq}$  nazivamo normalizirani centralni geometrijski moment. Nakon skaliranja sa faktorom  $s$ , centralni moment u novim koordinatama mijenja se kao

$$\mu'_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x' - x'_c)^p (y' - y'_c)^q f'(x', y') dx' dy' \quad (3.14)$$

$$\mu'_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s^p (x - x_c)^p s^q (y - y_c)^q f(x, y) s^2 dx dy = s^{p+q+2} \mu_{pq}. \quad (3.15)$$

$$y'_{00} = s^2 \mu_{00} \quad (3.16)$$

$$v'_{pq} = \frac{\mu'_{pq}}{(\mu'_{00})} = \frac{s^{p+q+2} \mu_{pq}}{(s^2 \mu_{00})^\omega} = v_{pq}, \quad (3.17)$$

Jednadžba (3.17) dokazuje invarijantnost na skaliranje normaliziranih momenata. Moment koji je korišten za normalizaciju ne može više biti korišten za prepoznavanje zato što je vrijednost tog normaliziranog momenta uvijek jednaka jedinici.

### 3.9. Tradicionalne rotacijske invarijante

Hu-ove rotacijske invarijante za ravinsku rotaciju oko ishodišta prikazane su na slici 2.

$$\phi_1 = m_{20} + m_{02},$$

$$\phi_2 = (m_{20} - m_{02})^2 + 4m_{11}^2,$$

$$\phi_3 = (m_{30} - 3m_{12})^2 + (3m_{21} - m_{03})^2,$$

$$\phi_4 = (m_{30} + m_{12})^2 + (m_{21} + m_{03})^2,$$

$$\begin{aligned} \phi_5 = & (m_{30} - 3m_{12})(m_{30} + m_{12})((m_{30} + m_{12})^2 - 3(m_{21} + m_{03})^2) \\ & + (3m_{21} - m_{03})(m_{21} + m_{03})(3(m_{30} + m_{12})^2 - (m_{21} + m_{03})^2), \end{aligned}$$

$$\phi_6 = (m_{20} - m_{02})((m_{30} + m_{12})^2 - (m_{21} + m_{03})^2) + 4m_{11}(m_{30} + m_{12})(m_{21} + m_{03}),$$

$$\begin{aligned} \phi_7 = & (3m_{21} - m_{03})(m_{30} + m_{12})((m_{30} + m_{12})^2 - 3(m_{21} + m_{03})^2) \\ & - (m_{30} - 3m_{12})(m_{21} + m_{03})(3(m_{30} + m_{12})^2 - (m_{21} + m_{03})^2). \end{aligned}$$

Slika 2 Hu-ove invarijante [3]

Ako zamijenimo geometrijske momente sa centralnim ili normaliziranim momentima u relacijama na slici dobivamo invarijante ne samo na rotaciju već i na translaciju i skaliranje. Huove invarijante, naime, imaju ograničenu moć prepoznavanja, međusobno su zavisne i ograničene samo na drugi i treći red momenata. Unatoč svojim nedostacima jako su se raširile i našle puno uspješnih primjena. Nakon Hu-a mnogi su počeli izvoditi invarijante na različite načine, a mi ćemo u slijedećem poglavlju obraditi Flusserov način koji je predstavio opću teoriju konstruiranja rotacijskih invarijanti momenata. Njegova teorija bazira se na kompleksnim momentima, dozvoljava momente bilo kojeg reda i međusobnu zavisnost i nezavisnost.

### 3.10. Rotacijske invarijante iz kompleksnih momenata

#### 3.10.1 Konstrukcija rotacijskih invarijanti

Kompleksne momente definirane jednačbom (3.18)

$$c_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x + iy)^p (x - iy)^q f(x, y) dx dy \quad (3.18)$$

možemo lako izraziti pomoću polarnih koordinata  $(r, \theta)$

$$x = r \cos \theta \quad (3.19)$$

$$y = r \sin \theta \quad (3.20)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.21)$$

$$\theta = \arctan(y/x) \quad (3.22)$$

i onda jednačba (3.18) poprima oblik

$$c_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r^{p+q+1} e^{i(p-q)\theta} f(r, \theta) dr d\theta. \quad (3.23)$$

Ako je  $f'$  rotirana verzija od  $f$ ,  $f'(r, \theta) = f(r, \theta + \alpha)$  gdje je  $\alpha$  kut rotacije. Obilježimo kompleksni moment od  $f'$  kao  $c'_{pq}$

$$c'_{pq} = e^{-i(p-q)\alpha} \cdot c_{pq} \quad (3.24)$$

$$c'_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{2\pi} r^{p+q+1} e^{i(p-q)(\theta-\alpha)} f(r, \theta) dr d\theta = e^{-i(p-q)\alpha} \cdot c_{pq} \quad (3.25)$$

Neka  $n \geq 1$  i neka  $k_i, p_i$  i  $q_i (i=1, \dots, n)$  budu ne negativni cijeli brojevi tako da

$$\sum_{i=1}^n k_i (p_i - q_i) = 0. \quad (3.26)$$

Onda je

$$I = \prod_{i=1}^n c_{p_i q_i}^{k_i} \quad (3.27)$$

invarijanta rotacije.

Ako rotiramo sliku za kut  $\alpha$  možemo dokazati jednadžbu (3.27) sa jednadžbom (3.28).

$$I' = \prod_{i=1}^n c_{p_i q_i}'^{k_i} = \prod_{i=1}^n e^{-ik_i(p_i - q_i)\alpha} \cdot c_{p_i q_i}^{k_i} = e^{-i\alpha \sum_{i=1}^n k_i (p_i - q_i)} \cdot I = I \quad (3.28)$$

### 3.10.2 Konstrukcija baze

Prethodni napisane jednadžbe dozvoljavaju kreiranje beskonačnog broja invarijanti bilo kojeg reda momenata, ali samo nekoliko njih je međusobno neovisno. Pod pojmom baze podrazumijevamo najmanji set potreban za izraziti sve druge invarijante [4]. Baza mora biti neovisna i potpuna, odnosno nijedan njen element ne može biti izražen kao funkcija drugih elemenata i rotacijska invarijanta može biti izražena samo pomoću baze [5]. Baza je bitna u svim

zadacima prepoznavanja uzoraka jer daje diskriminacijsku moć i minimizira troškove računalne obrade.

Def. Neka  $k \geq 1$  i neka  $\delta = \{I_1, \dots, I_k\}$  bude set rotacijskih invarijanti. Također, neka  $J$  bude rotacijska invarijanta.  $J$  je neovisna od  $\delta$  ako i samo ako postoji funkcija  $F$  od  $k$  varijabli tako da

$$J = F(I_1, \dots, I_k).$$

$J$  je nezavisna od  $\delta$  u suprotnom.

Def. Neka  $k \geq 1$  i neka  $\delta = \{I_1, \dots, I_k\}$  bude set rotacijskih invarijanti. Set  $\delta$  je zavisna ako i samo ako postoji  $k_0 \leq k$  tako da  $I_{k_0}$  zavisi od  $\delta \div \{I_{k_0}\}$ . Set  $\delta$  je nezavisan u suprotnom.

Def. Neka  $\delta$  bude set rotacijskih invarijanti i neka  $\beta$  bude podset.  $\beta$  se zove potpuni podset ako i samo ako bilo koji element od  $\delta \div \beta$  ovisi o  $\beta$ . Set  $\beta$  je baza od  $\delta$  ako i samo ako je neovisan i potpun.

Teorem 1. Ako razmotrimo kompleksne momente do reda  $r \geq 2$ . Konstruirati ćemo rotacijske invarijante po jednažbi (3.29).

$$\beta_N = \{\phi_N(p, q) \equiv c_{pq} c_{q_0 p_0} | p \geq q \wedge p + q \leq r\}, \quad (3.29)$$

gdje su  $q_0$  i  $p_0$  proizvoljni indeksi koji moraju zadovoljavati uvjete  $p_0 + q_0 \leq r$ ,  $p_0 - q_0 = N$  i  $c_{p_0 q_0} \neq 0$ .

Onda je  $\beta$  baza svih rotacijskih invarijanti kreiranih iz momenata bilo koje vrste do reda  $r$ .

Prethodni teorem tvrdi da je  $\beta$  baza svih mogućih rotacijskih invarijanta momenta, što znači da  $\beta$  pruža u najmanju ruku jednaku diskriminacijsku snagu kao bilo koji drugi set invarijanti momenata do danog reda  $r \geq 2$ . Ovaj teorem ne samo da omogućava kreiranje baze već također pomoću njega možemo izračunati broj elemenata baze unaprijed, a obilježiti ćemo ga sa  $|\beta|$ .

Ako je  $r$  neparni broj onda

$$|\beta| = \frac{1}{4}(r+1)(r+3), \quad (3.30)$$

a ako je  $r$  paran broj onda je

$$|\beta| = \frac{1}{4}(r+2)^2. \quad (3.31)$$

Baza definirana u prethodnom teoremu generalno nije unikatna. Zavisi o odabiru  $p_0$  i  $q_0$  što je vrlo važno. Postavlja se pitanje kako ćemo odabrati indekse u praksi. U jednu ruku želimo držati  $p_0$  i  $q_0$  što manjima mogućima zato što su momenti nižeg reda manje osjetljivi na šum, a u drugu ruku vrijednosti  $c_{p_0q_0}$  koje su blizu nule mogu uzrokovati numeričku nestabilnost invarijanti. Zato je predložen algoritam da se počne sa  $p_0 = 2$  i  $q_0 = 1$  i provjerimo da li  $|c_{p_0q_0}|$  prelazi zadani prag za sve objekte, ako ne povećamo i  $p_0$  i  $q_0$  za jedan i ponovimo proceduru.

### 3.10.3. Baze invarijanti drugog i trećeg reda

U ovom poglavlju dan je primjer invarijanti konstruiram prema teoremu 1. Izabran je  $p_0=2$  i  $q_0=1$ .

$$\emptyset(1,1) = c_{11}, \quad (3.32)$$

$$\emptyset(2,1) = c_{21}c_{12} \quad (3.33)$$

$$\emptyset(2,0) = c_{20}c_{12}^2 \quad (3.34)$$

$$\emptyset(3,0) = c_{30}c_{12}^3 \quad (3.35)$$

Prema teoremu ova baza bi trebala sadržavati i invarijante  $\emptyset(0,0)=c_{00}$  i  $\emptyset(1,0)=c_{10}c_{12}$ , ali te invarijante nisu uključene u bazu zato što je  $c_{00}=\mu_{00}$  korišten za normalizaciju za skaliranje i  $c_{10}=m_{10} + im_{01}$  je korišten za postizanje translacijske invarijantnosti.



## 4. Program

### 4.1. Uvod

U ovom poglavlju obraditi ćemo pretvaranje iz fotografije u boji u binarnu sliku. Zatim zapisati prethodno objašnjene momente u diskretnom obliku da bi ih mogli primijeniti na slikama. Obradivati ćemo sa jednim programom po dva seta od petnaest slika. U prvom setu nalazit će se pet originalnih slika od kojih je svaka pomoću funkcija u matlabu prvo rotirana, a zatim skalirana i rotirana. Ovaj set nazvat ćemo idealni slučaj. Slike su rotirane i skalirane tako da što bolje odgovaraju slikama iz drugog seta. U drugom setu slike su fotografirane zasebno. Pet predmeta prvo je fotografirano u nekom početnom položaju, a zatim rukom zakrenuto i onda skalirano odzumeranjem na fotoaparatu i ponovo zakrenuto rukom. Ovaj set nazvat ćemo realni slučaj. Potom ćemo prikazati uspješnost različitih pristupa.

### 4.2. Binarizacija fotografija

Da bi smo mogli računati momente fotografije potrebno ju je prethodno binarizirati, a to znači pretvoriti u crno bijelu fotografiju gdje logička nula predstavlja crnu, a logička jedinica bijelu boju [6]. Zbog ne adekvatnih uvjeta fotografiranja i različitosti predmeta proces binarizacije pokazao se kao vrlo složen. U prilogu se nalazi kod funkcije za binarizaciju koji daje dovoljno dobre rezultate na odabranom setu predmeta.

Funkcija „bw“ učitava sliku i vraća sliku, a poziva se `bw(imread(naziv_fotografije.jpg))`. „Imread“ je MATLAB-ova funkcija koja učitava fotografiju sa računala [7].



**Slika 3 Originalna fotografija**

U 3. redu stoji naredba koja smanjuje dimenziju učitane fotografije za 5 puta i time uvelike skraćuje vrijeme izvršavanja programa. Slijedeće dvije naredbe mijenjaju sliku od slike u boji u sivu i u tip double koji je potreban za filter u 11. redu. Filter koristimo za uklanjanje šuma.



**Slika 4 Siva slika**



**Slika 5 Slika nakon primijenjenog filtera**

Funkcija „imadjust“ mijenja sliku “q” tako da sve vrijednosti piksela koje su ispod 0.2, a da podsjetimo mogu biti između 0 i 1, postavlja u 0, a sve vrijednosti iznad 0.3 postavlja u 1 i time ostavlja sivo područje samo između 0.2 i 0.3.

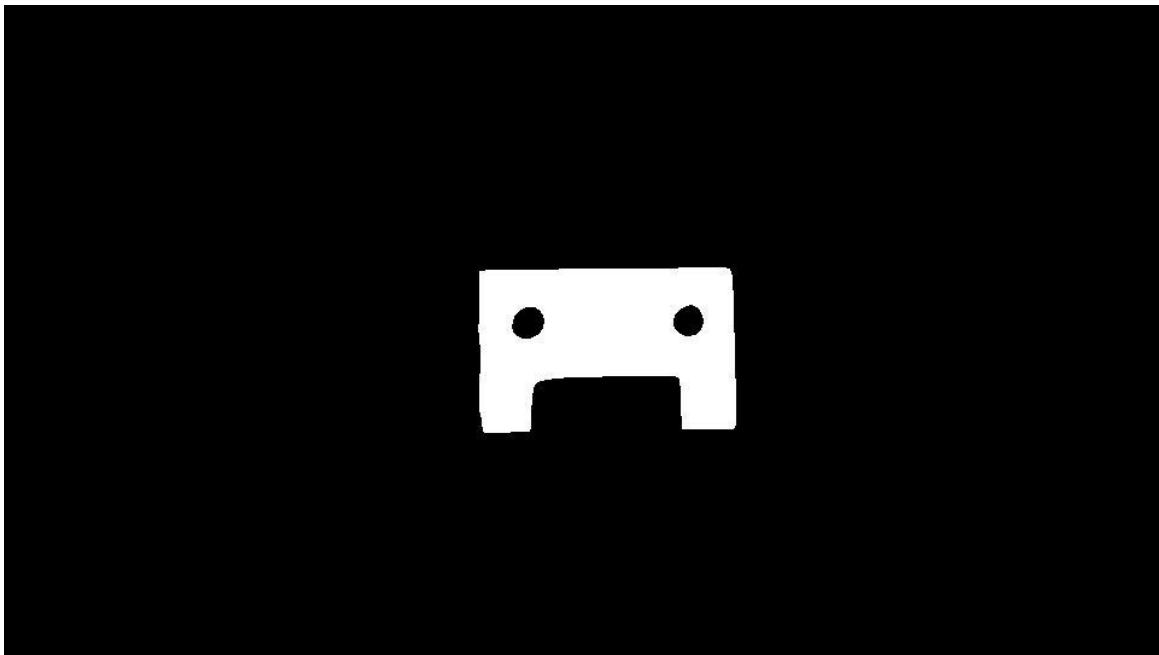


**Slika 6 Slika nakon primijenjene naredbe "imadjust"**

Kao što možemo vidjeti sa slike 6 siva područja ostala su oko rubova gdje zbog sjene ne možemo odrediti točan rub između predmeta i pozadine. Taj problem nadalje rješavamo naredbama „graythresh“ i „im2bw“. Funkcija „graythresh“ računa prag ispod kojega će sve biti crno odnosno iznad potpuno bijelo, a funkcija „im2bw“ onda postavlja vrijednosti ispod praga u crno, iznad praga u bijelo. Na linijama 26 i 27 nalaze se funkcije koje provode morfološke operacije na fotografiji odnosno zaglađuju rubove i popunjavaju manje “rupe”. Na kraju ostaje samo invertirati sliku, a to znači promijeniti ono što je do tada bilo crno u bijelo o obrnuto. To postizemo tako da od 1 oduzmemo sliku. Invertiranje je potrebno zbog izračuna momenata.



Slika 7 Slika nakon funkcije "im2bw"



Slika 8 Završna slika koju funkcija vraća

### 4.3. Zapis momenata u diskretnom obliku

Da bi mogli koristiti momente koji su izvedeni u poglavlju 3, odnosno da bi računalno znalo raditi sa njima moramo ih iz kontinuiranog oblika prebaciti u diskretni. Ispod se nalaze svi momenti koje smo obradili zapisani u kontinuiranom i u diskretnom obliku, a pripadajuće MATLAB funkcije se nalaze u prilogu [8].

Geometrijski momenti u kontinuiranom i diskretnom obliku zapisuju se na slijedeći način:

$$m_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^p y^q f(x, y) dx dy \quad (4.1)$$

$$m_{pq} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N i^p j^q f_{ij} \quad (4.2)$$

Funkcija „Moment\_qp“ koja se nalazi u prilogu zapis je diskretnog oblika geometrijskih momenata u matlabu.

Centralni momenti u kontinuiranom i diskretnom obliku nalaze se ispod, a funkcija „Central\_pq“ koja odgovara diskretnom obliku nalazi se u prilogu.

$$\mu_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_c)^p (y - y_c)^q f(x, y) dx dy \quad (4.3)$$

$$x_c = \frac{m_{10}}{m_{00}} \quad (4.4)$$

$$y_c = \frac{m_{01}}{m_{00}} \quad (4.5)$$

$$\mu_{pq} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (i - \frac{m_{10}}{m_{00}})^p (j - \frac{m_{01}}{m_{00}})^q f_{ij} \quad (4.6)$$

Nakon centralnih momenata zapisat ćemo kompleksne momente u kontinuiranom i diskretnom obliku a njima je odgovarajuća matlab funkcija „CComplex\_pq“.

$$c_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{x} + i\tilde{y})^p (\tilde{x} - i\tilde{y})^q f(x, y) dx dy \quad (4.7)$$

$$\tilde{x} = x - x_c \quad (4.8)$$

$$\tilde{y} = y - y_c \quad (4.9)$$

$$c_{pq} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\Delta i + i\Delta j)^p (\Delta i - i\Delta j)^q f_{ij} \quad (4.10)$$

$$\Delta i = i - \frac{m_{10}}{m_{00}} \quad (4.11)$$

$$\Delta j = j - \frac{m_{01}}{m_{00}} \quad (4.12)$$

Skalirane kompleksne momente dobivamo iz kompleksnih momenata preko jednadžbe a odgovara im funkcija „SCComplex\_pq“

$$v_{pq} = \frac{c_{pq}}{c_{00}^{\left(\frac{p+q}{2}+1\right)}}, \quad (4.13)$$

gdje je

$$c_{00} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = m_{00}. \quad (4.14)$$

#### 4.4. Izbor baze i normalizirana razlika baznih vektora

Elementi baze kompleksnih momenata koju ćemo koristiti, a konstruirana je prema pravilima iz prethodnog poglavlja prikazani su u jednadžbama od (4.15) do (4.20).

$$\Phi(1) = c_{11} \quad (4.15)$$

$$\Phi(2) = c_{21}c_{12} \quad (4.16)$$

$$\Phi(3) = Re\{c_{20}c_{12}^2\} \quad (4.17)$$

$$\Phi(4) = Im\{c_{20}c_{12}^2\} \quad (4.18)$$

$$\Phi(5) = Re\{c_{30}c_{12}^3\} \quad (4.19)$$

$$\Phi(6) = Im\{c_{30}c_{12}^3\} \quad (4.20)$$

Ista baza koristi se za skalirane kompleksne momente samo skalirana prema jednadžbi (4.13).

Da bi smo mogli kvantitativno odrediti razliku između objekata moramo izračunati normiranu razliku baznih vektora objekata gdje 0 znači apsolutno podudaranje odnosno da su objekti isti, a 1 da se radi o potpuno različitim objektima.

Normu baznog vektora  $\|R_c(A)\|$  nalazimo preko jednadžbe (4.22), a u MATLAB-u to činimo funkcijom *norm()*.

$$R_c(A) = [\Phi(1) \Phi(2) \Phi(3) \Phi(4) \Phi(5) \Phi(6)] \quad (4.21)$$

$$\|R_c(A)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^6 \Phi(i)^2} \quad (4.22)$$

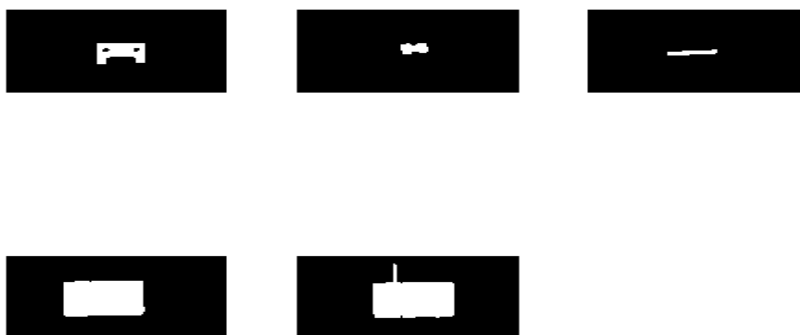
Nakon izračuna normi dvaju baznih vektora normiranu razliku računamo preko jednadžbe (4.23).

$$D(A, B) = \frac{\|R_c(A) - R_c(B)\|}{\|R_c(A)\| + \|R_c(B)\|} \quad (4.23)$$

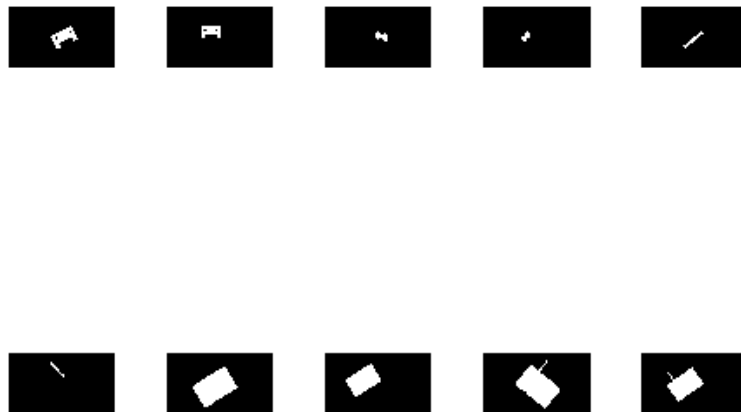


#### 4.5. Idealni slučaj sa računanjem skaliranih kompleksnih momenata

U prilogu se nalazi programski kod "Idealni slučaj" koji učitava slike i obrađuje ih kako je objašnjeno u prethodnom poglavlju funkcijom „bw“. Učitane slike se zatim rotiraju i skaliraju. Slike su rotirane i skalirane tako da bi otprilike odgovarale realnim fotografijama koje će se obrađivati u slijedećem programu. Nakon toga računamo vektor invarijanti preko prethodno objašnjene funkcije "VektorScaledComplexMoments" i spremamo ih u matricu "Scaled\_Complex\_O". Zatim računamo normiranu razliku baznih vektora svih elementa i spremamo u matricu **M** koja je dimenzija 15x15. Slike koje su korištene za rotaciju i translaciju su prikazane na slici 9, a rotirane i skalirane slike na slici 10. U tabeli 1 nalaze se vrijednosti iz matrice **M**.



Slika 9 Originalne slike



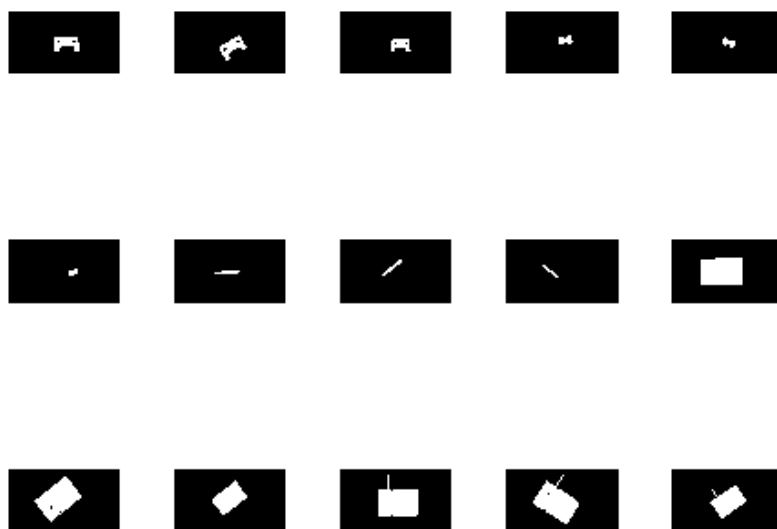
Slika 10 Rotirane i skalirane slike

Tabela 1 Vrijednosti matrice M pri idealnom slučaju i skaliranim kompleksnim momentima

		0,00057 3	0,01601 2	0,99999 9	0,99999 9	0,99995 3	0,99588 3	0,995355	0,970517	0,999998	0,999998	0,999999	0,977317	0,977199	0,978739
	0,00057 3		0,01544 0	0,99999 9	0,99999 9	0,99995 3	0,99584 9	0,995319	0,970426	0,999998	0,999998	0,999999	0,977304	0,977186	0,978727
	0,01601 2	0,01544 0		1 5	0,99999 6	0,99996 6	0,99485 7	0,99426	0,967855	0,999998	0,999998	0,999999	0,976977	0,976858	0,97841
	0,99999 9	0,99999 9	1 1	0 3	0,03560 3	0,06662 5	0,96895 6	0,968819	0,963312	0,997794	0,997793	0,99838	0,98648	0,986363	0,988531
	0,99999 9	0,99999 9	0,99999 5	0,03560 3		0,09019 3	0,97031 4	0,970172	0,964493	0,997631	0,997625	0,998264	0,990055	0,989953	0,991819
	0,99995 3	0,99995 3	0,99996 6	0,06662 5	0,09019 3		0,97048 7	0,970386	0,966187	0,99786	0,997869	0,998417	0,975964	0,97583	0,97847
	0,99588 3	0,99584 9	0,99485	0,96895 6	0,97031 4	0,97048 7	0 5	0,007885	0,255418	0,999961	0,999961	0,999972	0,999661	0,999648	0,999834
	0,99535 5	0,99531 9	0,99426	0,96881 9	0,97017 2	0,97038 6	0,00788 5	0 5	0,247936	0,999961	0,999961	0,999972	0,999731	0,99972	0,999881
	0,97051 7	0,97042 6	0,96785 5	0,96331 2	0,96449 3	0,96618 7	0,25541 8	0,247936	0 0	0,999945	0,999944	0,999961	0,997469	0,997491	0,997054
	0,99999 8	0,99999 8	0,99999 8	0,99779 4	0,99763 1	0,99786 1	0,99996 1	0,999961	0,999945	0 0	0,033106	0,176414	0,999958	0,999958	0,999947
	0,99999 8	0,99999 8	0,99999 8	0,99779 3	0,99762 5	0,99786 9	0,99996 1	0,999961	0,999944	0,033106	0 0	0,198273	0,999944	0,999945	0,999931
	0,99999 9	0,99999 9	0,99999 9	0,99838	0,99826 4	0,99841 7	0,99997 2	0,999972	0,999961	0,176414	0,198273	0 0	0,999981	0,999981	0,999975
	0,97731 7	0,97730 4	0,97697 7	0,98648	0,99005 5	0,97596 4	0,99966 1	0,999731	0,997469	0,999958	0,999944	0,999981	0 0	0,00301	0,039969
	0,97719 9	0,97718 6	0,97685 8	0,98636 3	0,98995 3	0,97583	0,99964 8	0,99972	0,997491	0,999958	0,999945	0,999981	0,00301	0 0	0,042961
	0,97873 9	0,97872 7	0,97841	0,98853 1	0,99181 9	0,97847	0,99983 4	0,999881	0,997054	0,999947	0,999931	0,999975	0,039969	0,042961	0 0

#### 4.6. Realni slučaj sa računanjem skaliranih kompleksnih momenata

Za razliku od prošlog u ovom poglavlju raditi ćemo sa slikama kada je svaka fotografirana zasebno što bi bio realan slučaj koji možemo susresti npr. u industriji. Kod radi na isti način kao i prethodni samo su slike drugačije, a nalazi se u prilogu pod nazivom „Realni slučaj“. Obradene slike nalaze se na slici 11, a vrijednosti matrice  $\mathbf{M}$  u tabeli 2.



Slika 11 Obradene slike

Tabela 2 Vrijednosti matrice M pri realnom slučaju i skaliranim kompleksnim momentima

		0,01344 9	0,07645 3	0,99999 9	0,99934 1	0,99903 6	0,99588 3	0,98884	0,999869	0,999998	0,999814	0,999917	0,977317	0,996637	0,974889
	0,01344 9		0,08938 8		0,99930 8	0,99914 3	0,99504 2	0,987444	0,999974	0,999998	0,99983	0,999923	0,977725	0,99674	0,975349
	0,07645 3	0,08938 8		0,99996 3	0,99946	0,99838 5	0,99872 1	0,994071	0,9983	0,999999	0,999721	0,999882	0,974232	0,995955	0,971436
	0,99999 9		0,99996 3		0,39013 8	0,45042 5	0,96895 6	0,9742	0,964202	0,997794	0,660775	0,880269	0,98648	0,811207	0,98523
	0,99934 1	0,99930 8	0,99946		0,39013 9	0,71111 0	0,97934 7	0,982022	0,978412	0,996226	0,724254	0,895176	0,990956	0,959006	0,992877
	0,99903 6	0,99914 3	0,99838 5	0,45042 5	0,71111 1		0,93501 2	0,947416	0,920612	0,999267	0,820825	0,940693	0,921573	0,789747	0,91717
	0,99588 3	0,99504 2	0,99872 1	0,96895 6	0,97934 7	0,93501 2	0,10508 0	0,105083	0,146989	0,999961	0,993755	0,998142	0,999661	0,995146	0,999445
	0,98884	0,98744 4	0,99407 1	0,9742	0,98202 2	0,94741 6	0,10508 3		0,243138	0,999966	0,995037	0,998539	1	0,996768	0,999985
	0,99986 9	0,99997 4	0,9983	0,96420 2	0,97841 2	0,92061 2	0,14698 9	0,243138		0,99996	0,992153	0,99762	0,996429	0,991767	0,995492
	0,99999 8	0,99999 8	0,99999 9	0,99779 4	0,99622 6	0,99926 7	0,99996 1	0,999966	0,99996		0,993613	0,982189	0,999958	0,99976	0,999967
	0,99981 4		0,99972 1	0,66077 5	0,72425 4	0,82082 5	0,99375 5	0,995037	0,992153	0,993613		0,523476	0,968266	0,689386	0,969552
	0,99991 7	0,99992 3	0,99988 2	0,88026 9	0,89517 6	0,94069 3	0,99814 2	0,998539	0,99762	0,982189	0,523476		0,986302	0,852749	0,987081
	0,97731 7	0,97772 5	0,97423 2	0,98648	0,99095 6	0,92157 3	0,99966 1	1	0,996429	0,999958	0,968266	0,986302		0,724607	0,055855
	0,99663 7	0,99674	0,99595 5	0,81120 7	0,95900 6	0,78974 7	0,99514 6	0,996768	0,991767	0,99976	0,689386	0,852749	0,724607		0,742692
	0,97488 9	0,97534 9	0,97143 6	0,98523	0,99287 7	0,91717	0,99944 5	0,999985	0,995492	0,999967	0,969552	0,987081	0,055855	0,742692	

#### 4.7. Idealni i realni slučaj sa računanjem kompleksnih momenata

U ovom poglavlju testirat ćemo umjesto skaliranih kompleksnih momenata samo kompleksne momente. Kompleksni momenti nisu invarijantni na skaliranje ali se možda pokažu uspješni na samo zarotiranim slikama. Kompleksne momente čiji se zapis nalazi u funkciji „VektorComplexMoment“ primjeniti ćemo na idealnom i realnom slučaju zamjenom funkcije „VektorScaledComplexMoment“ u programima „Idealni slučaj“ i „Realni slučaj“, a vrijednosti matrice  $\mathbf{M}$  kao i u prošlim slučajevima prikazat ćemo u tabelama 3 i 4.

Tabela 3 Vrijednosti matrice M pri idealnom slučaju i kompleksnim momentima

























															
	0 7	0,00145 6	0,41208 7	0,99990 6	0,99990 5	0,99990 4	0,999904	0,999904	0,999904	0,999904	0,999904	0,999904	0,988824	0,988859	0,995025
	0,00145 7	0 2	0,41219 5	0,99990 6	0,99990 5	0,99990 4	0,999904	0,999904	0,999904	0,999904	0,999904	0,999904	0,988928	0,988962	0,995068
	0,41208 6	0,41219 2	0 0	0,99977 5	0,99977 5	0,99977 3	0,99977	0,99977	0,99977	0,99977	0,99977	0,99977	0,978004	0,978107	0,989136
	0,99990 7	0,99990 7	0,99977 5	0 0	0,00519 1	0,03131 5	0,02729 7	0,027446	0,049768	0,081346	0,0813	0,082694	0,99851	0,998523	0,995896
	0,99990 6	0,99990 6	0,99977 5	0,00519 1	0 0	0,02697 7	0,02629 8	0,026283	0,044717	0,076787	0,076739	0,078152	0,998519	0,998532	0,995921
	0,99990 5	0,99990 5	0,99977 3	0,03131 5	0,02697 7	0 0	0,04219	0,041846	0,027529	0,05079	0,050748	0,052133	0,998548	0,99856	0,995998
	0,99990 4	0,99990 4	0,99977	0,02729 7	0,02629 8	0,04219	0 0	0,001065	0,048201	0,085917	0,085875	0,087231	0,998535	0,998548	0,995964
	0,99990 4	0,99990 4	0,99977	0,02744 6	0,02628 3	0,04184 6	0,00106 5	0 0	0,047384	0,085309	0,085266	0,086626	0,998536	0,998548	0,995965
	0,99990 4	0,99990 4	0,99977	0,04976 8	0,04471 7	0,02752 9	0,04820 1	0,047384	0 0	0,041622	0,041558	0,043017	0,998567	0,99858	0,996053
	0,99990 4	0,99990 4	0,99977	0,08134 6	0,07678 7	0,05079	0,08591 7	0,085309	0,041622	0 0	0,000103	0,001534	0,998579	0,998591	0,996086
	0,99990 4	0,99990 4	0,99977	0,0813	0,07673 9	0,05074 8	0,08587 5	0,085266	0,041558	0,000103	0 0	0,001615	0,998579	0,998591	0,996086
	0,99990 4	0,99990 4	0,99977	0,08269 4	0,07815 2	0,05213 3	0,08723 1	0,086626	0,043017	0,001534	0,001615	0 0	0,998579	0,998591	0,996086
	0,98882 4	0,98892 8	0,97800 4	0,99851	0,99851 9	0,99854 8	0,99853 5	0,998536	0,998567	0,998579	0,998579	0,998579	0 0	0,004768	0,468141
	0,98885 9	0,98896 2	0,97810 7	0,99852 3	0,99853 2	0,99856	0,99854 8	0,998548	0,99858	0,998591	0,998591	0,998591	0,004768	0 0	0,47166
	0,99502 5	0,99506 8	0,98913 6	0,99589 6	0,99592 1	0,99599 8	0,99596 4	0,995965	0,996053	0,996086	0,996086	0,996086	0,468141	0,47166	0 0

Tabela 4 Vrijednosti matrice M pri realnom slučaju i kompleksnim momentima

	0	0,03269	0,54350 6	0,99990 7	0,99990 5	0,99990 4	0,99990 4	0,999905	0,999904	0,999904	0,999956	0,999911	0,988824	0,998143	0,996441
	0,03269	0	0,55488 2	0,99990 9	0,99990 7	0,99990 7	0,99990 7	0,999907	0,999906	0,999906	0,999956	0,999913	0,991044	0,997952	0,997233
	0,54350 6	0,55488 2	0	0,99968 6	0,99968 3	0,99967 9	0,99967 9	0,99968	0,999679	0,999679	0,999849	0,999701	0,958346	0,995464	0,983761
	0,99990 7	0,99990 9	0,99968 6	0	0,04449 8	0,03637 3	0,02729 7	0,038696	0,042718	0,081346	0,610911	0,041369	0,99851	0,980115	0,996034
	0,99990 5	0,99990 7	0,99968 3	0,04449 8	0	0,07708 3	0,04876 2	0,063081	0,025017	0,045146	0,628407	0,072815	0,99857	0,980333	0,996194
	0,99990 4	0,99990 7	0,99967 9	0,03637 3	0,07708 3	0	0,05151	0,056281	0,071495	0,109916	0,6044	0,04425	0,998505	0,979976	0,99602
	0,99990 4	0,99990 7	0,99967 9	0,02729 7	0,04876 2	0,05151	0	0,019079	0,044464	0,085917	0,617786	0,066692	0,998535	0,980334	0,996103
	0,99990 5	0,99990 7	0,99968	0,03869 6	0,06308 1	0,05628 1	0,01907 9	0	0,062755	0,102656	0,612115	0,073667	0,998517	0,980081	0,996052
	0,99990 4	0,99990 6	0,99967 9	0,04271 8	0,02501 7	0,07149 5	0,04446 4	0,062755	0	0,04341	0,63107	0,071728	0,998567	0,980763	0,996192
	0,99990 4	0,99990 6	0,99967 9	0,08134 6	0,04514 6	0,10991 6	0,08591 7	0,102656	0,04341	0	0,642722	0,099616	0,998579	0,980952	0,996227
	0,99995 6	0,99995 6	0,99984 9	0,61091 1	0,62840 7	0,6044	0,61778 6	0,612115	0,63107	0,642722	0	0,591939	0,99439	0,931328	0,984815
	0,99991 1	0,99991 3	0,99970 1	0,04136 9	0,07281 5	0,04425	0,06669 2	0,073667	0,071728	0,099616	0,591939	0	0,998421	0,979521	0,995789
	0,98882 4	0,99104 4	0,95834 6	0,99851	0,99857	0,99850 5	0,99853 5	0,998517	0,998567	0,998579	0,99439	0,998421	0	0,929965	0,454518
	0,99814 3	0,99795 2	0,99546 4	0,98011 5	0,98033 3	0,97997 6	0,98033 4	0,980081	0,980763	0,980952	0,931328	0,979521	0,929965	0	0,83075
	0,99644 1	0,99723 3	0,98376 1	0,99603 4	0,99619 4	0,99602	0,99610 3	0,996052	0,996192	0,996227	0,984815	0,995789	0,454518	0,83075	0



Tabela 3 nam prikazuje donekle očekivane rezultate za idealni slučaj. Između samo zarotiranog i zarotiranog i skaliranog je jedan ili dva reda veličine razlike. Za realni slučaj kompleksni momementi ne daju smislene rezultate.

#### 4.8. Realni slučaj sa normiranjem svakog elemnta vektora skaliranih kompleksnih momenata

Iz prva dva primjera vidimo da se realni i “teoretski” slučaj razlikuju odnosno da nećemo dobiti jednake rezultate ako predmet zarotiramo i skaliramo u MATLAB-u ili ako ga rotiramo rukom i onda ponovo fotografiramo. Pri rotiranju u MATLAB-u sve sjene i sve nepravilnosti rotiraju zajedno sa predmetom, a pri fotografiranju sa svakom novom fotografijom dolaze nove nepravilnosti. Kako se u realnom slučaju pojavljuju velike razlike između pojedinih elemenata vektora pokušat ćemo sa drugačijim normiranjem, odnosno normirati ćemo svaki element vektora. Nova napisana funkcija koju smo iskoristili “VektorScaledComplexMomentsNew” odgovara funkciji “VektorScaledComplexMoments” samo je dodano normiranje svakog elementa na dva načina i primjenjena je u programu „Realni slučaj“. Novi načini normiranja nalazi se ispod, a zatim slijede tabele 5 i 6 novih vrijednosti usporedbe elemenata. Spomenuta funkcija nalazi se nalazi u prilogu.

Prvi način:

$$\Phi_{11} = \frac{c_{11}}{(\sqrt{|c_{11}|})^2} \quad (4.24)$$

$$\Phi_{21} = \frac{c_{21} \cdot c_{12}}{(\sqrt{|c_{11}|})^4} \quad (4.25)$$

$$\Phi_{20} = \frac{c_{20} \cdot c_{12}^2}{(\sqrt{|c_{11}|})^6} \quad (4.26)$$

$$\Phi_{30} = \frac{c_{30} \cdot c_{12}^3}{(\sqrt{|c_{11}|})^8} \quad (4.27)$$

Drugi način:

$$\Phi_{11} = \frac{c_{11}}{|c_{11}|} \quad (4.28)$$

$$\Phi_{21} = \frac{c_{21} \cdot c_{12}}{(\sqrt{|c_{11}|})^2} \quad (4.29)$$































$$\Phi_{20} = \frac{c_{20} \cdot c_{12}^2}{(\sqrt{|c_{11}|})^3} \quad (4.30)$$

$$\Phi_{30} = \frac{c_{30} \cdot c_{12}^3}{(\sqrt{|c_{11}|})^4} \quad (4.31)$$

Tabela 5 Vrijednosti matrice M pri prvom načinu drugačijeg normiranja realnog slučaja i skaliranim kompleksnim momentima

	0 78	0,01176 78	0,05927 48	0,99999 77	0,99901 09	0,99838 62	0,99969 4	0,999105 3	0,999989 9	0,999995 7	0,999503 3	0,999776 5	0,940744	0,991095	0,935545 8
	0,01176 78	0 0	0,07060 09	0,99999 95	0,99895 25	0,99855 19	0,99963 05	0,998991 7	0,999997 3	0,999995 4	0,999540 4	0,999790 5	0,941299 7	0,991291 5	0,936171 8
	0,05927 48	0,07060 09	0 0	0,99994 32	0,99923 29	0,99743 79	0,99990 5	0,999523 5	0,999879 2	0,999996 5	0,999293 4	0,999697 3	0,936276 2	0,989858	0,930589 4
	0,99999 77	0,99999 95	0,99994 32	0 0	0,40501 7	0,46853 67	0,32142 62	0,415667 9	0,244630 3	0,996276 7	0,511576 9	0,809794 1	0,989846 9	0,798961 3	0,988989 9
	0,99901 09	0,99895 25	0,99923 29	0,40501 7	0 0	0,73383 8	0,52572 72	0,568025 5	0,544276 6	0,993170 7	0,640969 7	0,832218 7	0,993909 7	0,961103 8	0,995217 5
	0,99838 62	0,99855 19	0,99743 79	0,46853 67	0,73383 8	0 0	0,35831 12	0,393868 8	0,284877 8	0,998823 8	0,731024 8	0,907258 1	0,928531	0,726274 3	0,925907
	0,99969 4	0,99963 05	0,99990 5	0,32142 62	0,52572 72	0,35831 12	0 0	0,109545 9	0,144676 4	0,997803 4	0,721994 5	0,903112 4	0,998337	0,878778 7	0,997633 3
	0,99910 53	0,99899 17	0,99952 35	0,41566 79	0,56802 55	0,39386 88	0,10954 59	0,243162 0	0,243162 4	0,998100 8	0,775613 8	0,923924 6	0,999999 5	0,911766 6	0,999921 3
	0,99998 99	0,99999 73	0,99987 92	0,24463 03	0,54427 66	0,28487 78	0,14467 64	0,243162 4	0 0	0,997754 9	0,655879 1	0,877515 4	0,985173 7	0,805965 2	0,983777
	0,99999 57	0,99999 54	0,99999 65	0,99627 67	0,99317 07	0,99882 38	0,99780 34	0,998100 8	0,997754 9	0 0	0,993511 2	0,982038 2	0,999956 8	0,999754 2	0,999965 5
	0,99950 33	0,99954 04	0,99929 34	0,51157 69	0,64096 97	0,73102 48	0,72199 45	0,775613 8	0,655879 1	0,993511 2	0 0	0,520812 1	0,968095 5	0,688242 2	0,968961 3
	0,99977 65	0,99979 05	0,99969 73	0,80979 41	0,83221 87	0,90725 81	0,90311 24	0,923924 6	0,877515 4	0,982038 2	0,520812 1	0 0	0,986123 5	0,850972 9	0,986712
	0,94074 4	0,94129 97	0,93627 62	0,98984 69	0,99390 97	0,92853 1	0,99833 7	0,999999 5	0,985173 7	0,999956 8	0,968095 5	0,986123 5	0 0	0,724704 5	0,048276 5
	0,99109 5	0,99129 15	0,98985 8	0,79896 13	0,96110 38	0,72627 43	0,87877 87	0,911766 6	0,805965 2	0,999754 2	0,688242 2	0,850972 9	0,724704 5	0 0	0,739577 5
	0,93554 58	0,93617 18	0,93058 94	0,98898 99	0,99521 75	0,92590 7	0,99763 33	0,999921 3	0,983777	0,999965 5	0,968961 3	0,986712	0,048276 5	0,739577 5	0 0

Tabela 6 Vrijednosti matrice M pri drugom načinu drugačijeg normiranja realnog slučaja i skaliranim kompleksnim momentima

															
	0	0,01176 8	0,05927 5	0,99999 8	0,99901 1	0,99838 6	0,99969 4	0,999105	0,99999	0,999996	0,999503	0,999776	0,940744	0,991095	0,935546
	0,01176 8	0	0,07060 1	0,99999 9	0,99895 2	0,99855 2	0,99963	0,998992	0,999997	0,999995	0,99954	0,99979	0,9413	0,991292	0,936172
	0,05927 5	0,07060 1	0	0,99994 3	0,99923 3	0,99743 8	0,99990 5	0,999524	0,999879	0,999996	0,999293	0,999697	0,936276	0,989858	0,930589
	0,99999 8	0,99999 9	0,99994 3	0	0,40501 7	0,46853 7	0,32142 6	0,415668	0,24463	0,996277	0,511577	0,809794	0,989847	0,798961	0,98899
	0,99901 1	0,99895 2	0,99923 3	0,40501 7	0	0,73383 8	0,52572 7	0,568025	0,544277	0,993171	0,64097	0,832219	0,99391	0,961104	0,995218
	0,99838 6	0,99855 2	0,99743 8	0,46853 7	0,73383 8	0	0,35831 1	0,393869	0,284878	0,998824	0,731025	0,907258	0,928531	0,726274	0,925907
	0,99969 4	0,99963	0,99990 5	0,32142 6	0,52572 7	0,35831 1	0	0,109546	0,144676	0,997803	0,721995	0,903112	0,998337	0,878779	0,997633
	0,99910 5	0,99899 2	0,99952 4	0,41566 8	0,56802 5	0,39386 9	0,10954 6	0	0,243162	0,998101	0,775614	0,923925	1	0,911767	0,999921
	0,99999	0,99999 7	0,99987 9	0,24463	0,54427 7	0,28487 8	0,14467 6	0,243162	0	0,997755	0,655879	0,877515	0,985174	0,805965	0,983777
	0,99999 6	0,99999 5	0,99999 6	0,99627 7	0,99317 1	0,99882 4	0,99780 3	0,998101	0,997755	0	0,993511	0,982038	0,999957	0,999754	0,999965
	0,99950 3	0,99954	0,99929 3	0,51157 7	0,64097	0,73102 5	0,72199 5	0,775614	0,655879	0,993511	0	0,520812	0,968095	0,688242	0,968961
	0,99977 6	0,99979	0,99969 7	0,80979 4	0,83221 9	0,90725 8	0,90311 2	0,923925	0,877515	0,982038	0,520812	0	0,986123	0,850973	0,986712
	0,94074 4	0,9413	0,93627 6	0,98984 7	0,99391	0,92853 1	0,99833 7	1	0,985174	0,999957	0,968095	0,986123	0	0,724704	0,048276
	0,99109 5	0,99129 2	0,98985 8	0,79896 1	0,96110 4	0,72627 4	0,87877 9	0,911767	0,805965	0,999754	0,688242	0,850973	0,724704	0	0,739577
	0,93554 6	0,93617 2	0,93058 9	0,98899	0,99521 8	0,92590 7	0,99763 3	0,999921	0,983777	0,999965	0,968961	0,986712	0,048276	0,739577	0

Kao što se vidi iz tabela rezultati u odnosu na prvi realni primjer se nisu znatno popravili što znači da program još uvijek ne prepoznaje neke objekte kao zarotirane ili skalirane. Pogledom na vrijednosti invarijanti sa slike 12 uočeno je da su viši momenti jednaki 0, što upućuje na to da se onin na neki način poništavaju. Jedan od mogućih razloga poništavanja momenata jest simetrija objekta, a svi objekti do sada fotografirani su simetrični bar po jednoj, a neki predmeti i oko dvije osi. Da bi izbjegli problem poništavanja momenata i dobili kvalitetnija rješenja potrebno je pronaći invarijante za simetriju.

```
Scaled_Complex_0 =

    1.0e-04 *

Columns 1 through 12

    0         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0
    0         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0
   -0.2979   -0.3017   -0.2661    0.0012    0.0007    0.0026    0.0767    0.0879    0.0682    0.0000    0.0002    0.0001
    0.0151    0.0222   -0.0140   -0.0001    0.0005   -0.0014    0.0135    0.0274   -0.0063    0.0000   -0.0002   -0.0001
   -0.0009   -0.0010   -0.0007    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000    0.0000
    0.0001    0.0001   -0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000    0.0000   -0.0000   -0.0000   -0.0000   -0.0000

Columns 13 through 15

    0         0         0
    0         0         0
   -0.0034   -0.0003   -0.0037
   -0.0010   -0.0007   -0.0013
    0.0000    0.0000    0.0000
   -0.0000    0.0000   -0.0000
```

Slika 12 Vrijednosti invarijanti

#### 4.9. Idealni i realni slučaj sa skaliranim kompleksnim momentima invarijantnim na simetriju

Invarijante na simetriju konstruirat ćemo prema jednadžbi (4.32) iz [9] slično kao što smo u poglavlju 3.10.2 radili za ne simetrične objekte.

$$\beta_N = \left\{ \emptyset_N(p, q) \equiv c_{pq} c_{q_0 p_0}^k \mid p \geq q \wedge p + q \leq r \wedge k \equiv \frac{(p-q)}{N} \text{ is integer} \right\} \quad (4.32)$$

Gdje je  $N$  broj rotacijskih simetrija, a  $q_0$  i  $p_0$  proizvoljni indeksi koji moraju zadovoljavati uvjete  $p_0 + q_0 \leq r$ ,  $p_0 - q_0 = N$  i  $c_{p_0 q_0} \neq 0$ .

Broj nezavisnih invarijanti koji možemo izračunati iz jednadžbe (4.32) računa se preko jednadžbe (4.33) kada je  $N$  konačan ili jednadžbe (4.34) kada je  $N$  beskonačan odnosno kada imamo kružni objekt.

$$|\beta_N| = \sum_{j=0}^{\lfloor r/N \rfloor} \left\lfloor \frac{r-j \cdot N+2}{2} \right\rfloor \quad (4.33)$$

$$|\beta_N| = \left\lfloor \frac{r+2}{2} \right\rfloor \quad (4.34)$$

Funkciju “VektorScaledCoplexMoments” smo zamijenili sa “VektorScaledComplexMomentsSym” i njen kod se nalazi u prilogu. U funkciji odabrano je šest novih invarijanti koje odgovaraju uvjetima iz jednadžbe (4.32). Funkcija je zatim testirana u programima „Idealni slučaj“ i „Realni slučaj“, a vrijednosti matrice **M** nalaze se u tabelama 7 i 8.

Tabela 7 Vrijednosti matrice M pri metodi primjene invarijanti na simetriju na idelani slučaj

		0,00037 0	0,00883 1	0,12914 4	0,12897 8	0,14230 4	0,97682 3	0,97678	0,976166	0,567307	0,567274	0,568312	0,662988	0,662951	0,660869
	0,00037 9		0,00846 8	0,12878 7	0,12862 2	0,14194 8	0,97684	0,976798	0,976184	0,567057	0,567024	0,568063	0,662782	0,662745	0,660662
	0,00883 1	0,00846 8		0,12052 5	0,12035 9	0,13369 5	0,97723	0,977195	0,976592	0,561296	0,561263	0,562311	0,658006	0,657969	0,655863
	0,12914 4	0,12878 7	0,12052 5		0,00025 8	0,01367 8	0,98222	0,982191	0,981718	0,474469	0,474432	0,475619	0,585	0,584956	0,582518
	0,12897 8	0,12862 2	0,12035 9	0,00025 9		0,01384 2	0,98221	0,982185	0,981712	0,474598	0,474561	0,475747	0,585107	0,585063	0,582625
	0,14230 4	0,14194 8	0,13369 5	0,01367 8	0,01384 2		0,98270	0,982672	0,982211	0,463802	0,463764	0,464966	0,575927	0,575882	0,573405
	0,97682 3	0,97684	0,97723 7	0,98222 4	0,98221 8	0,98270 4		0,000851 0	0,013093 0	0,993703	0,993702	0,993722	0,995419	0,995419	0,995384
	0,97678	0,97679	0,97719 5	0,98219 1	0,98218 5	0,98267 2	0,00085 1		0,012249 0	0,993691	0,99369	0,99371	0,995411	0,99541	0,995375
	0,97616 6	0,97618 4	0,97659 2	0,98171 8	0,98171 2	0,98221 1	0,01309 3	0,012249 0		0,993522	0,993521	0,993541	0,995287	0,995287	0,995251
	0,56730 7	0,56705 7	0,56129 6	0,47446 9	0,47459 8	0,46380 2	0,99370 3	0,993691	0,993522		0,519E-05 0	0,001484 0	0,153502	0,153441	0,149806
	0,56727 4	0,56702 4	0,56126 3	0,47443 2	0,47456 1	0,46376 4	0,99370 2	0,99369	0,993521	5,19E-05 0		0,001533 0	0,153548	0,153487	0,149852
	0,56831 2	0,56806 3	0,56231 1	0,47561 9	0,47574 7	0,46496 6	0,99372 2	0,99371	0,993541	0,001484 0	0,001533 0		0,152063	0,152001	0,148365
	0,66298 8	0,66278 2	0,65800 6	0,585	0,58510 7	0,57592 7	0,99541 9	0,995411	0,995287	0,153502	0,153548	0,152063		8,22E-05 0	0,00379 0
	0,66295 1	0,66274 5	0,65796 9	0,58495 6	0,58506 3	0,57588 2	0,99541 9	0,99541	0,995287	0,153441	0,153487	0,152001	8,22E-05 0		0,00373 0
	0,66086 9	0,66066 2	0,65586 3	0,58251 8	0,58262 5	0,57340 5	0,99538 4	0,995375	0,995251	0,149806	0,149852	0,148365	0,00379 0	0,00373 0	

Tabela 8 Vrijednosti matrice M pri metodi primjene invarijanti na simetriju na realni slučaj

		0,01061 0 2	0,00934 6	0,12914 4	0,06854 9	0,15603 9	0,97682 3	0,976537	0,976445	0,567307	0,565286	0,56239	0,662988	0,628553	0,66114
	0,01061 2		0,00863 4	0,11956 4	0,05982 3	0,14639 1	0,97728 3	0,977002	0,976912	0,5603	0,55825	0,555322	0,657213	0,622312	0,655341
	0,00934 6	0,00863 4		0,12115 6	0,06001 6	0,14822 7	0,97721 7	0,976935	0,976844	0,562199	0,560173	0,557248	0,658703	0,623962	0,656836
	0,12914 4	0,11956 4	0,12115 6		0,06319 8	0,02795 7	0,98222 4	0,982003	0,981932	0,474469	0,47219	0,468853	0,585	0,544919	0,582818
	0,06854 9	0,05982 3	0,06001 6	0,06319 8		0,09096 8	0,97978 9	0,979539	0,979458	0,522	0,519857	0,516725	0,625098	0,58787	0,623078
	0,15603 9	0,14639 1	0,14822 7	0,02795 7	0,09096 8		0,98318 8	0,982979	0,982912	0,45252	0,450184	0,44676	0,566301	0,524957	0,564048
	0,97682 3	0,97728 3	0,97721 7	0,98222 4	0,97978 9	0,98318 8		0,006525 0	0,007641 0	0,993703	0,993662	0,99361	0,995419	0,99482	0,99539
	0,97653 7	0,97700 2	0,97693 5	0,98200 3	0,97953 9	0,98297 9	0,00652 5		0,002845 0	0,993624	0,993583	0,99353	0,995362	0,994755	0,995333
	0,97644 5	0,97691 2	0,97684 4	0,98193 2	0,97945 8	0,98291 2	0,00764 1	0,002845 0		0,993598	0,993557	0,993504	0,995343	0,994734	0,995314
	0,56730 7	0,5603 9	0,56219 9	0,47446 9	0,522 9	0,45252 3	0,99370 3	0,993624	0,993598		0,003633 0	0,007628 0	0,153502	0,095299	0,150277
	0,56528 6	0,55825 3	0,56017 3	0,47219 7	0,51985 7	0,45018 4	0,99366 2	0,993583	0,993557	0,003633 0		0,004386 0	0,15656	0,098398	0,153336
	0,56239 2	0,55532 2	0,55724 8	0,46885 3	0,51672 5	0,44676 9	0,99361 9	0,99353	0,993504	0,007628 0	0,004386 0		0,160702	0,102621	0,157477
	0,66298 8	0,65721 3	0,65870 3	0,585 8	0,62509 8	0,56630 1	0,99541 9	0,995362	0,995343	0,153502	0,15656	0,160702		0,059106 0	0,003428 0
	0,62855 3	0,62231 2	0,62396 2	0,54491 9	0,58787 7	0,52495 7	0,99482 9	0,994755	0,994734	0,095299	0,098398	0,102621	0,059106 0		0,055847 0
	0,66114 1	0,65534 6	0,65683 8	0,58281 8	0,62307 8	0,56404 8	0,99539 8	0,995333	0,995314	0,150277	0,153336	0,157477	0,003428 0	0,055847 0	



Iz tabela je moguće vidjeti da novoizabrane invarijante popravljaju greške prethodno odabiranih invarijanti, ali ipak dolazi do nekih novih grešaka i ne može se reći da daje dobre rezultate.

Nadalje, napisana je nova funkcija prema jednadžbi (4.32) uz pomoć [10] koja generira potpuni bazni vektor invarijanti do željenog odnosno 6. reda i radi normiranje po svakom elementu vektora prema jednadžbama (4.35) i (4.36).

$$\Phi = \text{sign}(c) \cdot |c|^{\frac{1}{pwi}} \quad (4.35)$$

Gdje je

$$pwi = 1 + \frac{p-q}{2}. \quad (4.36)$$

Ulazne varijable za funkciju su slika, željeni red momenta,  $p_0$  i broj rotacijskih simetrija  $N$ .  $N$  se određuje tako da se pronađe višekratnik rotacijskih simetrija svih objekata i to je u ovom slučaju 2, a  $q_0$  se dobije zbrajanjem  $p_0$  sa  $N$  kako zahtjevaju uvjeti ispod jednadžbe (4.32). Funkcija koristi dvije for petlje. Prva prolazi po redu momenta, a druga po indeksu  $p$ . Zatim iz reda momenta i indeksa  $p$  možemo izračunati  $q$  i sa te dvije varijable i slikom imamo sve potrebno za poziv funkcije „SCComplex\_pq“.

U tabeli 9 nalaze se vrijednosti matrice **M** novonapisane funkcije primijenjene na realnom slučaju. Kod nove funkcije „sccauto“ nalazi se u prilogu.

Tabela 9 Vrijednosti matrice M pri metodi primjene potpunih invarijanti šestog reda na simetriju na realni slučaj

	0	0,05090 4	0,01778 7	0,16973 3	0,15879 9	0,16782 8	0,86278 5	0,864127	0,861712	0,244329	0,245417	0,247334	0,253021	0,246377	0,251111
	0,05090 4	0	0,06297 9	0,16485 9	0,16324 3	0,17224 2	0,86343 3	0,863534	0,862063	0,237178	0,235152	0,236451	0,246944	0,241462	0,244603
	0,01778 7	0,06297 9	0	0,16225 7	0,15017 4	0,15771 6	0,86531	0,866839	0,864311	0,235882	0,237908	0,239989	0,243875	0,236933	0,242099
	0,16973 3	0,16485 9	0,16225 7	0	0,04724 4	0,04074 3	0,87927 8	0,878663	0,877965	0,159234	0,15867	0,159597	0,176805	0,16978	0,175481
	0,15879 9	0,16324 3	0,15017 4	0,04724 4	0	0,03369 4	0,87295	0,873548	0,871784	0,190074	0,191812	0,193294	0,19932	0,191858	0,198077
	0,16782 8	0,17224 2	0,15771 6	0,04074 3	0,03369 4	0	0,88101 1	0,881554	0,879919	0,159802	0,162716	0,16441	0,169817	0,161709	0,168824
	0,86278 5	0,86343 3	0,86531	0,87927 8	0,87295	0,88101 1	0	0,088885	0,016845	0,911257	0,910769	0,910926	0,911258	0,910817	0,910771
	0,86412 7	0,86353 4	0,86683 9	0,87866 3	0,87354 8	0,88155 4	0,08888 5	0	0,075099	0,910565	0,909792	0,909874	0,911417	0,911051	0,910916
	0,86171 2	0,86206 3	0,86431 1	0,87796 5	0,87178 4	0,87991 9	0,01684 5	0,075099	0	0,910223	0,909664	0,909806	0,910337	0,909912	0,909839
	0,24432 9	0,23717 8	0,23588 2	0,15923 4	0,19007 4	0,15980 2	0,91125 7	0,910565	0,910223	0	0,016553	0,019966	0,06495	0,057144	0,065572
	0,24541 7	0,23515 2	0,23790 8	0,15867	0,19181 2	0,16271 6	0,91076 9	0,909792	0,909664	0,016553	0	0,003919	0,071615	0,065619	0,071626
	0,24733 4	0,23645 1	0,23998 9	0,15959 7	0,19329 4	0,16441	0,91092 6	0,909874	0,909806	0,019966	0,003919	0	0,073824	0,068236	0,073798
	0,25302 1	0,24694 4	0,24387 5	0,17680 5	0,19932	0,16981 7	0,91125 8	0,911417	0,910337	0,06495	0,071615	0,073824	0	0,014508	0,003706
	0,24637 7	0,24146 2	0,23693 3	0,16978	0,19185 8	0,16170 9	0,91081 7	0,911051	0,909912	0,057144	0,065619	0,068236	0,014508	0	0,015994
	0,25111 1	0,24460 3	0,24209 9	0,17548 1	0,19807 7	0,16882 4	0,91077 1	0,910916	0,909839	0,065572	0,071626	0,073798	0,003706	0,015994	0

## 5. Evaluacija rezultata

Da bi smo mogli evaluirati rezultate potrebno je odrediti po kojem kriteriju ćemo nešto označavati kao prepoznavanje. Reći ćemo da se prepoznavanje događa kada u jednom stupcu pripadajuće tabele ne postoji niti jedna vrijednost koja je manja od najveće vrijednosti u obojenim poljima.

Iz tabele 1 za idealni slučaj možemo vidjeti da se prepoznavanje događa u 100% slučajeva. Drugim riječima, normirana razlika baznih vektora najmanja je za varijacije istog objekta. Realni slučaj, za razliku od idealnog, prepoznaje u 80% slučajeva, kako se vidi iz tabele 2, ali tu brojku ne treba uzimati zdravo za gotovo. Iz tabele vidimo da neke razlike baznih vektora kod varijacija istog objekta poprimaju vrijednost 0.5 ili čak 0.7 i iako su te vrijednosti manje od razlike sa drugim objektima to još uvijek nisu vrijednosti koje želimo. Tabele 3 i 4 koje prikazuju rezultate drugačijeg normiranja daju isto prepoznavanje kao i originalni slučaj bez značajnog smanjenja razlike baznih vektora različitih varijacija istog objekta, što je bio glavni cilj metode. Nakon metodi sa drugačijim normiranjima dolazimo do metode sa invarijantama na simetriju koja daje 100% za idealni, a 93.3% za realni slučaj rotacije i skaliranja. Iako je razlika skaliranog i rotiranog 5. objekta i razlika između skaliranog 5 i originalnog 4 vrlo mala, to je i za očekivati jer je to u osnovi isti predmet sa malom vidljivom razlikom. Naposljetku dolazimo do metode sa potpunom simetrijama do 6. reda momenata i normiranjem. Ova metoda daje 100% prepoznavanje po zadanim kriterijima za realni slučaj. U grafu, koji se nalazi na slijedećoj stranici, prikazani su rezultati metoda, ali samo za realne slučajeve u kojima je svaka varijacija fotografirana posebno. Idealni slučajevi se ne nalaze u grafu jer za svaku metodu daju iste rezultate, odnosno 100% prepoznavanje.



Slika 13 Graf koji pokazuje vjerojatnost prepoznavanja različitih metoda

Legenda:

1- Klasična metoda primjena na realni slučaj sa vrijednostima iz tabele 2.

2-Metoda normiranja svakog elementa vektora primjena na realni slučaj sa vrijednostima iz tabele 3.

3-Metoda sa invarijantama na simetriju sa vrijednostima iz tabele 6

4-Metoda primjene potpunih invarijanti do 6 reda momenta sa normiranjem sa vrijednostima iz tabele 7.

## 6. Zaključak

U ovom radu primijenjena je metoda invarijantnih momenata na problem prepoznavanja objekata. Metoda je testirana na dva seta slika. Jedan set, gdje je svaka slika fotografirana zasebno, odnosno realni slučaj i drugi set, gdje je fotografirano samo 5 slika, a ostalih 10 je dobiveno rotacijom i skaliranjem 5 originalnih. Drugi set slika smo također nazvali kao idealni slučaj.

Kod idealnog slučaja sve korištene metode daju 100% prepoznavanja. Iako idealni slučaj ne daje priliku za popravke metode on ipak omogućava ono najbitnije, a to je provjera da li metode uopće rade. Nakon što smo se uvjerali na idealnom slučaju da metoda radi, testirana je na realnom slučaju. Tamo se vidi da metoda pri realnom slučaju griješi i greške se pokušavaju ispraviti sa normiranjem svakog elementa baznog vektora, ali ni to ne daje značajno bolje rezultate. Provjerom vrijednosti pojedinih invarijanti utvrđeno je da su neke jednake nuli i zaključeno je da je uzrok tomu poništavanja momenata. Prelaskom na drugi tip invarijanti, odnosno invarijanti na simetriju postižu se bolji, ali još uvijek ne idealni rezultati. Naposljetku, novoizabrane invarijante i pravilno normiranje tek daju tražene rezultate. Do sad navedeno govori da je za primjenu metode invarijantnih momenata vrlo važna priprema i izgled objekta. Ukoliko je priprema dobro izvedena, odnosno predmet koji želimo prepoznati je lako prepoznatljiv, na slici nema sjena, šuma i predmet ima dobro definirane rubove, brže je i lakše doći do invarijanti sa dovoljnom diskriminacijskom moći. Ukoliko slika nema prethodno navedene kvalitete dolazak do rješenja je moguć, ali zahtjeva pravilan izbor tipa invarijanti i balansiranje između momenata visokog i niskog reda. Također pojedine simetrije mogu voditi ka nedovoljnoj diskriminacijskoj moći zbog poništavanja momenata stoga uz balansiranje između momenata visokog i niskog reda treba također obratiti pozornost da odabrane invarijante budu invarijantne i na simetriju. Na kraju treba odabrati dobar način za normiranje svih invarijanti jer pri neadekvatnom normiranju može se desiti da zbog jedne invarijante sa velikom vrijednošću, invarijante sa manjim vrijednostima koje su potrebne za diskriminaciju ne dođu do izražaja.

## 7. Literatura

- [1] Zitova, B., Flusser, J., Suk, T.: *Moments and Moment Invariants in Pattern Recognition*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, 2009.
- [2] *Image moment*, [https://en.wikipedia.org/wiki/Image\\_moment#Applications](https://en.wikipedia.org/wiki/Image_moment#Applications), 10.01.2017.
- [3] Hu, M.-K.: *Visual Pattern Recognition by Moment Invariants*, IEEE Transactions on Information Theory 8(1962)2, 179-187.
- [4] Flusser, J.: *On the independence of rotation moment invariants*, Pattern Recognition, 33(2000)9, 1405-1410.
- [5] Flusser, J., Suk, T.: *Computer Analysis of Images and Patterns*, Springer Berlin Heidelberg, Prague, 2003.
- [6] Treiber, M.: *An Introduction to Object Recognition*, Springer, London, 2010.
- [7] *Image Processing Toolbox*, <https://www.mathworks.com/help/images/>, 12.01.2017.
- [8] Kasać, J.: *Metoda invariantnih momenata*, interni materijali, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb.
- [9] Flusser, J., Suk, T.: *Rotation Moment Invariants for Recognition of Symmetric Objects*, IEEE Transactions on Image Processing, 12(2006)12, 3784-3790.
- [10] *MATLAB codes* <http://zoi.utia.cas.cz/mi/codes>, 10.02.2017.

## 8. Prilog

### 8.1. PRILOG 1 Kod za binarizaciju slike

```
function [ bw2 ] = bw( I )
I = imresize(I,0.2); %Promjena dimenzije
G = rgb2gray(I); %Pretvorba u sivu sliku
D = im2double(G);%Pretvorba u double

r = 2; %Parametar za filter
eps = 0.1^2;
q = guidedfilter(D, D, r, eps);% Filter the image, using itself as a guide

J = imadjust(q(:, :, 1), [0.2 0.3], [0 1]);
% G = rgb2gray(J);
% figure(1)
% subplot(141), imshow(G)
% subplot(142), imshow(J(:, :, 1))
% subplot(143), imshow(J(:, :, 2))
% subplot(144), imshow(J(:, :, 3))

g = graythresh(J(:, :, 1));%Računanje praga za pretvorbu iz sive u binarnu sliku
bw = im2bw(J(:, :, 1), g);%Pretvorba u binarnu sliku
```

```
%Morfološke operacije
B = bwareaopen(bw,115);
B2 = bwmorph(B,'open',15);

%Invertiranje slike
B2 = 1 -B2;
%Pretvorba u binarnu sliku
bw2 = im2bw(B2);
% figure(2), imshow(B2)
end
```

## 8.2. PRILOG 2 Geometrijski momenti

```
function m_pq = Moment_pq(A,p,q)

sum1=0;
[n2 n1]=size(A);
for i=1:n1,
    for j=1:n2,
        sum1=sum1+i^p*j^q*A(j,i);
    end
end

m_pq=sum1
```

## 8.3. PRILOG 3 Centralni momenti

```
function cm_pq = Central_pq(A,p,q)
```



```

m00 = Moment_pq(A,0,0);
m10 = Moment_pq(A,1,0);
m01 = Moment_pq(A,0,1);

mx1 = m10/m00;
my1 = m01/m00;

sum1=0;

[n2 n1]=size(A);
for i=1:n1,
    for j=1:n2,
        sum1=sum1+(i-mx1)^p*(j-my1)^q*A(j,i);
    end
end

cm_pq = sum1;

```

#### 8.4. PRILOG 4 Kompleksni momenti

```
function cx_pq = CComplex_pq(A,p,q)
```

```

m00 = Moment_pq(A,0,0);
m10 = Moment_pq(A,1,0);
m01 = Moment_pq(A,0,1);

```

```
mx1 = m10/m00;
```

```
my1 = m01/m00;
```

```
sum1=0; sum0=0;
```

```
[n2 n1]=size(A);
```

```
for ii=1:n1,
```

```
    for jj=1:n2,
```

```
        sum0=sum0+A(jj,ii);
```

```
        sum1=sum1+((ii-mx1)+(jj-my1)*i)^p*((ii-mx1)-(jj-my1)*i)^q*A(jj,ii);
```

```
    end
```

```
end
```

```
cx_pq = sum1;
```

## 8.5. PRILOG 5 Skalirani kompleksni momenti

```
function scx_pq = SCComplex_pq(A,p,q)
```

```
m00 = Moment_pq(A,0,0);
```

```
m10 = Moment_pq(A,1,0);
```

```
m01 = Moment_pq(A,0,1);
```

```
mx1 = m10/m00;
```

```
my1 = m01/m00;
```

```
sum1=0;
```

```
[n2 n1]=size(A);
```

```
for ii=1:n1,
```

```

    for jj=1:n2,
        sum1=sum1+((ii-mx1)+(jj-my1)*i)^p*((ii-mx1)-(jj-my1)*i)^q*A(jj,ii);
    end
end

cx_pq = sum1;

scx_pq = cx_pq/m00^(1+(p+q)/2);

```

## 8.6. PRILOG 6 Vektor kompleksnih momenata

```
function vcm = VektorComplexMoments(A)
```

```
% KOMPLEKSNI MOMENTI DO 3eg REDA:
```

```
c11 = Ccomplex_pq(A,1,1);
```

```
c21 = Ccomplex_pq(A,2,1);
```

```
c12 = Ccomplex_pq(A,1,2);
```

```
c20 = Ccomplex_pq(A,2,0);
```

```
c30 = Ccomplex_pq(A,3,0);
```

```
F11 = c11;
```

```
F21 = c21*c12;
```

```
F20 = c20*c12^2;
```

```
F30 = c30*c12^3;
```

```
rF20 = real(F20);
```

```
iF20 = imag(F20);
```

```
rF30 = real(F30);
```

```
iF30 = imag(F30);
```

```
vcm = [F11 F21 rF20 iF20 rF30 iF30];
```

## 8.7. PRILOG 7 Vektor skaliranih kompleksnih momenata

```
function vcm = VektorScaledComplexMoments(A)
```

```
% SKALIRANI CENTRALNI KOMPLEKSNI MOMENTI DO 3eg REDA:
```

```
c11 = SCComplex_pq(A,1,1);
```

```
c21 = SCComplex_pq(A,2,1);
```

```
c12 = SCComplex_pq(A,1,2);
```

```
c20 = SCComplex_pq(A,2,0);
```

```
c30 = SCComplex_pq(A,3,0);
```

```
F11 = c11;
```

```
F21 = c21*c12;
```

```
F20 = c20*c12^2;
```

```
F30 = c30*c12^3;
```

```
rF20 = real(F20);
```

```
iF20 = imag(F20);
```

```
rF30 = real(F30);
```

```
iF30 = imag(F30);
```

```
vcm = [0*F11 0*F21 rF20 iF20 rF30 iF30];
```

## 8.8. PRILOG 8 Idealni slučaj

```
% Idealni slučaj
clc
clear all

% UČITAVANJE POČETNIH SLIKA
Orginal_1 = bw(imread('1.jpg'));
Orginal_2 = bw(imread('4.jpg'));
Orginal_3 = bw(imread('10.jpg'));
Orginal_4 = bw(imread('13.jpg'));
Orginal_5 = bw(imread('22.jpg'));

% Prikaz originala
figure(1)
subplot(231), imshow(Orginal_1)
subplot(232), imshow(Orginal_2)
subplot(233), imshow(Orginal_3)
subplot(234), imshow(Orginal_4)
subplot(235), imshow(Orginal_5)

% translacije i rotacije

T = 0.8

% ROTACIJA Orginal_1
R1 = 25;
Orginal_1R = imrotate(Orginal_1,R1,'crop');
Orginal_1T = Scaling(Orginal_1,T);
```

```
%ROTACIJA Orginal_2  
R2 = -20;  
R22 = 40;  
Orginal_2R = imrotate(Orginal_2,R2,'crop');  
Orginal_2T = Scaling(Orginal_2,T);  
Orginal_2T = imrotate(Orginal_2T,R22,'crop');
```

```
%ROTACIJA Orginal_3  
R3 = 35;  
R33 = -50;  
Orginal_3R = imrotate(Orginal_3,R3,'crop');  
Orginal_3T = Scaling(Orginal_3,T);  
Orginal_3T = imrotate(Orginal_3T,R33,'crop');
```

```
%ROTACIJA Orginal_4  
R4 = 30;  
Orginal_4R = imrotate(Orginal_4,R4,'crop');  
Orginal_4T = Scaling(Orginal_4R,T);
```

```
%ROTACIJA Orginal_5  
R5 = -40;  
R55 = 35;  
Orginal_5R = imrotate(Orginal_5,R5,'crop');  
Orginal_5T = Scaling(Orginal_5,T);  
Orginal_5T = imrotate(Orginal_5T,R55,'crop');
```

```
%Prikaz rotiran i skaliranih  
figure(2)
```

```
subplot(251), imshow(Original_1R)
subplot(252), imshow(Original_1T)
subplot(253), imshow(Original_2R)
subplot(254), imshow(Original_2T)
subplot(255), imshow(Original_3R)
subplot(256), imshow(Original_3T)
subplot(257), imshow(Original_4R)
subplot(258), imshow(Original_4T)
subplot(259), imshow(Original_5R)
subplot(2,5,10), imshow(Original_5T)
```

```
%Računanje momenata
```

```
Scaled_Complex_O(:,1) = VektorScaledComplexMomentsSym(Original_1)
Scaled_Complex_O(:,2) = VektorScaledComplexMomentsSym(Original_1R)
Scaled_Complex_O(:,3) = VektorScaledComplexMomentsSym(Original_1T)
Scaled_Complex_O(:,4) = VektorScaledComplexMomentsSym(Original_2)
Scaled_Complex_O(:,5) = VektorScaledComplexMomentsSym(Original_2R)
Scaled_Complex_O(:,6) = VektorScaledComplexMomentsSym(Original_2T)
Scaled_Complex_O(:,7) = VektorScaledComplexMomentsSym(Original_3)
Scaled_Complex_O(:,8) = VektorScaledComplexMomentsSym(Original_3R)
Scaled_Complex_O(:,9) = VektorScaledComplexMomentsSym(Original_3T)
Scaled_Complex_O(:,10) = VektorScaledComplexMomentsSym(Original_4)
Scaled_Complex_O(:,11) = VektorScaledComplexMomentsSym(Original_4R)
Scaled_Complex_O(:,12) = VektorScaledComplexMomentsSym(Original_4T)
Scaled_Complex_O(:,13) = VektorScaledComplexMomentsSym(Original_5)
Scaled_Complex_O(:,14) = VektorScaledComplexMomentsSym(Original_5R)
Scaled_Complex_O(:,15) = VektorScaledComplexMomentsSym(Original_5T)
```

```
%Normirana razlika baznih vektora svakog sa svakim elementom
```

```
for i=1:15
```

```
for j=1:15
    M(j,i) = norm(Scaled_Complex_O(:,i) -
Scaled_Complex_O(:,j))/(norm(Scaled_Complex_O(:,i))+norm(Scaled_Complex_O(:,j)));
    j = j+1;
end
i = i+1;
end
```

## 8.9. PRILOG 9 Realni slučaj

%Realni slučaj

clear all

clc

%UČITAVANJE I OBRADA SLIKA

```
O1 = bw(imread('1.jpg'));
O2 = bw(imread('2.jpg'));
O3 = bw(imread('3.jpg'));
O4 = bw(imread('4.jpg'));
O5 = bw(imread('5.jpg'));
O6 = bw(imread('6.jpg'));
O7 = bw(imread('10.jpg'));
O8 = bw(imread('11.jpg'));
O9 = bw(imread('12.jpg'));
O10 = bw(imread('13.jpg'));
O11 = bw(imread('14.jpg'));
O12 = bw(imread('15.jpg'));
O13 = bw(imread('22.jpg'));
O14 = bw(imread('23.jpg'));
```



```
O15 = bw(imread('24.jpg'));
```

```
figure(1)
```

```
subplot(351), imshow(O1)
```

```
subplot(352), imshow(O2)
```

```
subplot(353), imshow(O3)
```

```
subplot(354), imshow(O4)
```

```
subplot(355), imshow(O5)
```

```
subplot(356), imshow(O6)
```

```
subplot(357), imshow(O7)
```

```
subplot(358), imshow(O8)
```

```
subplot(359), imshow(O9)
```

```
subplot(3,5,10), imshow(O10)
```

```
subplot(3,5,11), imshow(O11)
```

```
subplot(3,5,12), imshow(O12)
```

```
subplot(3,5,13), imshow(O13)
```

```
subplot(3,5,14), imshow(O14)
```

```
subplot(3,5,15), imshow(O15)
```

```
%Računanje baznih vektora
```

```
Scaled_Complex_O(:,1) = VektorScaledComplexMomentsSym(O1)
```

```
Scaled_Complex_O(:,2) = VektorScaledComplexMomentsSym(O2)
```

```
Scaled_Complex_O(:,3) = VektorScaledComplexMomentsSym(O3)
```

```
Scaled_Complex_O(:,4) = VektorScaledComplexMomentsSym(O4)
```

```
Scaled_Complex_O(:,5) = VektorScaledComplexMomentsSym(O5)
```

```
Scaled_Complex_O(:,6) = VektorScaledComplexMomentsSym(O6)
```

```
Scaled_Complex_O(:,7) = VektorScaledComplexMomentsSym(O7)
```

```
Scaled_Complex_O(:,8) = VektorScaledComplexMomentsSym(O8)
```

```
Scaled_Complex_O(:,9) = VektorScaledComplexMomentsSym(O9)
```

```
Scaled_Complex_O(:,10) = VektorScaledComplexMomentsSym(O10)
```

```
Scaled_Complex_O(:,11) = VektorScaledComplexMomentsSym(O11)
```

```

Scaled_Complex_O(:,12) = VektorScaledComplexMomentsSym(O12)
Scaled_Complex_O(:,13) = VektorScaledComplexMomentsSym(O13)
Scaled_Complex_O(:,14) = VektorScaledComplexMomentsSym(O14)
Scaled_Complex_O(:,15) = VektorScaledComplexMomentsSym(O15)
%Normirana razlika baznih vektora svakog sa svakim elementom

for i=1:15
    for j=1:15
        M(j,i) = norm(Scaled_Complex_O(:,i) -
Scaled_Complex_O(:,j))/(norm(Scaled_Complex_O(:,i))+norm(Scaled_Complex_O(:,j)));
        j = j+1;
    end
    i = i+1;
end
end

```

## 7.10. PRILOG 10 Vektor skaliranih kompleksnih momenata za simetrične objekte

```
function vcm = VektorScaledComplexMomentsSym(A)
```

```
%SKALIRANI KOMPLEKSNI MOMENTI
```

```

c31 = SCComplex_pq(A,3,1);
c42 = SCComplex_pq(A,4,2);
c02 = SCComplex_pq(A,0,2);
c20 = SCComplex_pq(A,2,0);
c40 = SCComplex_pq(A,4,0);
c51 = SCComplex_pq(A,5,1);
c80 = SCComplex_pq(A,8,0);
c62 = SCComplex_pq(A,6,2);
c60 = SCComplex_pq(A,6,0);

```

```
F1 = c20*c02;  
F2 = c31*c02;  
F3 = c42*c02;  
F4 = c40*c02^2;  
F5 = c51*c02^2;  
F6 = c60*c02^3;
```

```
vcm = [F1 F2 F3 F4 F5 F6];
```

### 8.11. PRILOG 11 Automatski izračun svih invarijanti do zadanog reda

```
function c=sccauto(a,r,p0,N)  
  
% funkcija za računanje svih invarijanti do zadanog reda  
  
if r<2  
    error('Red momenta mora biti najmanje 2');  
end  
  
q0=p0+N;  
  
if r==2  
    p0=0;  
    q0=2;  
end  
  
if p0>q0  
    aux=p0;p0=q0;q0=aux; % zamjena vrijednosti p0 i q0
```

```

end

if r<p0+q0
    error('Red momenta mora biti veći ili jedna p0+q0');
end

id=q0-p0;                %razlika indexa sto je u ovom slučaju i N

ni=1;                    %redni broj invarijante

for r1=max(2,id):id:r
    for p=round(r1/2):r1
        q=r1-p;
        if mod(p-q,id)==0
            c(ni)=real(SCComplex_pq(a,p,q)*SCComplex_pq(a,p0,q0)^((p-q)/id))
            pwi(ni)=1+(p-q)/id
            ni=ni+1;
%            disp(sprintf('Re(c_{%d%d}c_{%d%d}^{(d)}),p,q,p0,q0,(p-q)/id))
            if p>q & (p~=q0 | q~=p0)
                c(ni)=imag(SCComplex_pq(a,p,q)*SCComplex_pq(a,p0,q0)^((p-q)/id));
                pwi(ni)=1+(p-q)/id
                ni=ni+1;
%            disp(sprintf('Im(c_{%d%d}c_{%d%d}^{(d)}),p,q,p0,q0,(p-q)/id))
            end
        end
    end
end

c=sign(c).*abs(c).^(1./pwi); %normalizacija

```